В. В. Шлыков

# ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 11 класса
общеобразовательных учреждений
с русским языком обучения
с 12-летним сроком обучения
(базовый и повышенный уровни)

2-е издание

*Допущено*
*Министерством образования*
*Республики Беларусь*

Минск «Народная асвета» 2008

УДК 514 (075.3=161.1)
ББК 22.151я721
Ш69

Рецензенты:
кафедра алгебры и методики преподавания математики
Витебского государственного университета им. П. М. Машерова
(канд. пед. наук, профессор *Е. Е. Семенов*);
учитель математики политехнической гимназии № 6 г. Минска
*С. А. Хомич*

**Шлыков, В. В.**

Ш69 Геометрия : учеб. пособие для 11-го кл. общеобразоват. учреждений с рус. яз. обучения с 12-летним сроком обучения (базовый и повышенный уровни) / В. В. Шлыков. — 2-е изд. — Минск : Нар. асвета, 2008. — 175 с. : ил.
ISBN 978-985-12-1977-9.

УДК 514 (075.3=161.1)
ББК 22.151я721

ISBN 978-985-12-1977-9



## ОГЛАВЛЕНИЕ

### *Дорогие друзья!*

Цель данного учебного пособия — помочь вам изучить раздел геометрии, который называется стереометрией. В предыдущих классах вы в основном изучали свойства плоских фигур, а теперь приступаете к изучению пространственных фигур. В процессе изучения стереометрии вы будете совершенствовать свои навыки логического мышления, развивать пространственные представления, умения мысленно моделировать новые геометрические фигуры и строить их графические изображения.

Постигая стереометрию, вы будете знакомиться с новыми геометрическими понятиями и закономерностями, многие из которых на протяжении столетий применяются в производственной деятельности, используются в архитектуре и живописи. Полученные знания помогут вам понять, почему геометрические свойства вызывают неизменный интерес у художников и архитекторов. Например, теоретик искусства раннего Возрождения итальянский ученый Леон Баттиста Альберти (1404—1472) подчеркивал значение геометрии в живописи, а гениальный французский архитектор XX столетия Ле Корбюзье (1887—1965) отмечал, что окружающий нас мир является миром геометрии и что своими художественными впечатлениями человек обязан именно геометрии. Произведения художников эпохи Возрождения Леонардо да Винчи (1452—1519) и Альбрехта Дюрера (1471—1528), величественные сооружения архитекторов древности и современников, убедительно свидетельствуют о том, что геометрия была и остается определяющей в вопросах гармонии и красоты.

Для успешного изучения стереометрии по ходу изложения теоретического материала приведены решения многих задач, которые помогут вам закрепить теоретические знания, выработать навыки применения этих знаний на практике. Пусть изучение стереометрии доставит вам удовольствие и убедит в правоте выдающегося французского математика и философа Блеза Паскаля (1623—1662), который считал, что «того, кто владеет геометрией, эта наука продвигает настолько далеко, что он оказывается вооруженным совершенно новой силой».

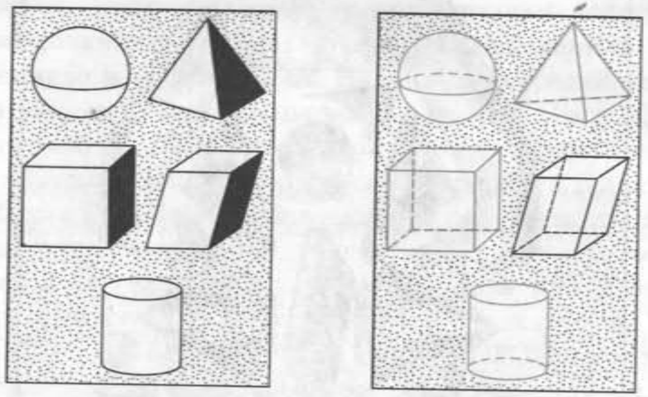
В учебном пособии теоретический материал, который изучается на повышенном уровне, отмечен *. Задачный материал, предлагаемый на базовом и повышенном уровнях, отмечен соответственно римскими цифрами I и II.

# ГЛАВА 1

## Введение в стереометрию

## § 1. Основные понятия

**1. Пространственные фигуры и их изображения.** В предыдущих классах мы в основном изучали *планиметрию* — геометрию на плоскости. Теперь, зная свойства плоских геометрических фигур, приступаем к изучению *стереометрии* (*греч.* — пространственный) — раздела геометрии, в котором исследуются свойства не только плоских, но и пространственных геометрических фигур, т. е. таких, не все точки которых лежат в одной плоскости: например, куб, параллелепипед, пирамида, шар, цилиндр (рис. 1, *а*, *б*).



*а)* *б)*

Рис. 1

Представление о пространственных геометрических фигурах дают окружающие нас предметы, если принимать во внимание только их форму и размеры, не интересуясь всеми остальными свойствами: цветом, массой и т. д. Например, апельсин, капля воды в невесомости дают представление о шаре; спичечный коробок и многие жилые дома имеют форму прямоугольного параллелепипеда; усыпальницы египетских фараонов построены в форме пирамиды.

Простейшими, или *основными*, фигурами в стереометрии являются *точки, прямые и плоскости.* Точки и прямые были основными фигурами в планиметрии. Наряду с ними в стереометрии в качестве основных рассматриваются и



плоскости. Кроме того, как и в планиметрии, здесь используются общематематические понятия «принадлежность» или «лежать на», «множество», «число» и т. д.

Всякая плоскость, как и любая геометрическая фигура, состоит из точек и мыслится безграничной, не имеющей толщины, идеально гладкой. Представление о части плоскости дает поверхность оконного стекла, гладкая поверхность письменного стола или мраморной плитки.

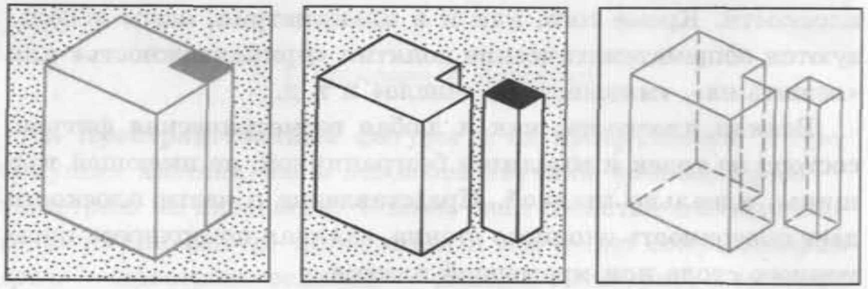
*В пространстве имеется бесконечно много плоскостей, и на каждой из них выполняется планиметрия, т. е. справедливы аксиомы планиметрии и следствия из них.* Поэтому в дальнейшем, рассматривая фигуры, лежащие в какой-либо плоскости, будем пользоваться всеми свойствами этих фигур и теоремами, доказанными в планиметрии. Кроме того, отметим, *что признаки равенства и подобия треугольников, изученные в планиметрии, справедливы и для треугольников, лежащих в разных плоскостях.*

В стереометрии большую роль играют пространственные представления, которые в соединении с логикой делают ее особенно красивой. Доказательства теорем стереометрии и решения задач сопровождаются изображениями плоских и пространственных фигур на плоскости рисунка (в тетради или на доске). За изображение фигуры принимается фигура, подобная ее проекции на некоторую плоскость, и выбирается такое изображение, которое дает верное представление о форме фигуры, является удобным для изучения ее свойств. При этом некоторые невидимые части фигуры для большей наглядности изображаются штриховой линией (рис. 2, *а*, *б*, *в*).

Перечислим простейшие правила построения изображений фигур.

1) *За изображение отрезка принимается отрезок. Середина отрезка изображается серединой его изображения; точка, делящая отрезок в отношении $m : n$, изображается точкой, делящей его изображение в отношении $m : n$.*

2) *Параллельные прямые (отрезки) изображаются параллельными прямыми (отрезками).*



а) б) в)

Рис. 2

3) *В качестве изображения любого треугольника можно принять произвольный треугольник.*

Из правил 2 и 3 следует, что за изображение квадрата, прямоугольника, ромба, параллелограмма можно принять произвольный параллелограмм. В дальнейшем этим будем пользоваться, выполняя изображения фигур.

**2. Многогранники.** Ранее уже отмечалось, что одним из объектов изучения стереометрии являются пространственные фигуры, к которым относятся и многогранники. Дадим описание многогранников.

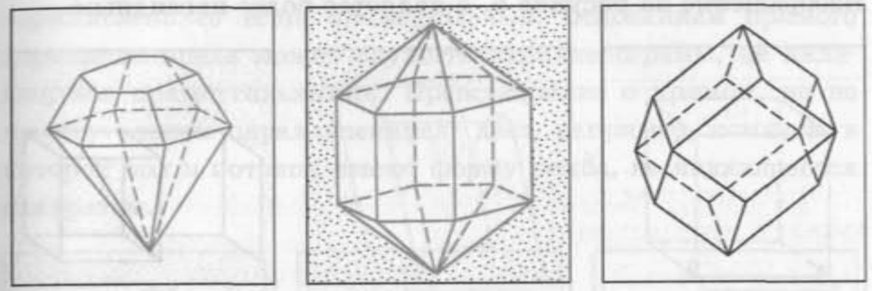
*Многогранник* представляет собой геометрическое тело, ограниченное конечным числом плоских многоугольников, любые два смежные из которых не лежат в одной плоскости; сами многоугольники называются *гранями*, их стороны *ребрами* многогранника, а их вершины — *вершинами* многогранника.

Понятие геометрического тела и определение многогранника будут даны позже, а сейчас отметим, что наглядное представление о геометрическом теле дает часть пространства, которую занимает какое-либо физическое тело.

Фигура, образованная всеми гранями многогранника, называется его *поверхностью (полной поверхностью)*, а сумма площадей всех его граней — *площадью (полной) поверхности*.

Представление о многогранниках дают кристаллы различных минералов, встречающихся в природе. Например, бриллиант есть алмаз, ограненный должным образом, т. е. имеющий форму определенного многогранника. Другими примерами моделей многогранников с достаточной точностью служат книжные полки, шкафы, строящиеся дома и т. д. Как видим, существует множество разнообразных предметов, имеющих форму многогранников.





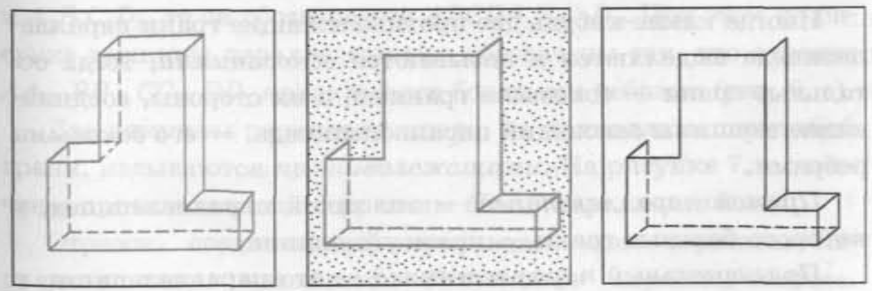
а) б) в)

Рис. 3

На рисунках 3, *а*, *б*, *в* и 4, *а* даны изображения многогранников.

А вот многоугольники, изображенные на рисунке 4, *б*, *в*, не ограничивают конечной части пространства, а следовательно, не образуют поверхность одного многогранника.

Многогранник называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани. Если это условие не выполняется, то многогранник называется *невыпуклым*. Выпуклые многогранники изображены на рисунках 3, *а*, *б*, *в*. Многогранник, изображенный на рисунке 4, *а*, — невыпуклый.

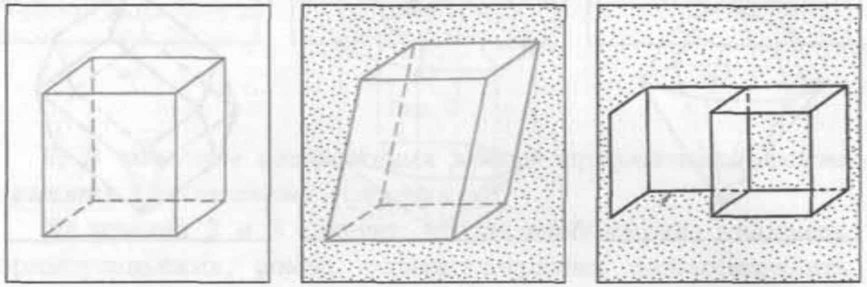


а) б) в)

Рис. 4

Дадим описание некоторых выпуклых многогранников.

**3. Куб, параллелепипед.** *Куб* — это многогранник, имеющий *шесть граней*, которые являются *равными квадратами*. Стороны квадратов называются *ребрами* куба, а вершины — *вершинами* куба. На рисунке 5, *а*, *б* даны изображения куба. Изображение на рисунке 5, *а* является более наглядным.



*а)* *б)* *в)*

Рис. 5

Заметим, что шесть равных квадратов в пространстве могут быть расположены так, что они не будут гранями одного куба, например, как показано на рисунке 5, *в*.

*Параллелепипед* — это многогранник, у которого *шесть граней и каждая из них — параллелограмм.*

Стороны параллелограммов называются *ребрами* параллелепипеда, а их вершины — *вершинами* параллелепипеда. Две грани параллелепипеда называются *противолежащими*, если они не имеют общего ребра, а имеющие общее ребро называются *смежными.*

Иногда какие-нибудь две противолежащие грани параллелепипеда выделяются и называются *основаниями*, тогда остальные грани — *боковыми* гранями, а их стороны, соединяющие вершины оснований параллелепипеда, — его *боковыми* ребрами.

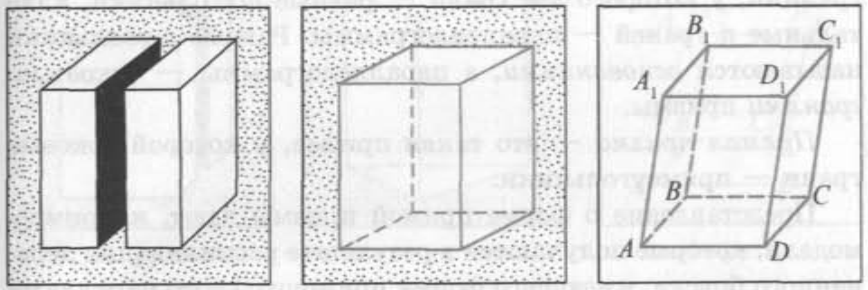
*Прямой параллелепипед* — это такой параллелепипед, у которого боковые грани — прямоугольники.

*Прямоугольный параллелепипед* — это параллелепипед, у которого все грани прямоугольники. Представление о форме прямоугольного параллелепипеда дают спичечный коробок,



строительный кирпич или каждая из моделей, которые получаются при распиливании на две части модели куба, сделанной из дерева, как показано на рисунке 6, *а*.

Заметим, что всякий прямоугольный параллелепипед является прямым параллелепипедом, *но не любой прямой параллелепипед есть прямоугольный.* Основанием прямого параллелепипеда может служить параллелограмм, не являющийся прямоугольником. Представление о прямом, но не прямоугольном параллелепипеде дает, например, комната, в которой пол и потолок имеют форму ромба, не являющегося квадратом.




*а)* *б)* *в)*

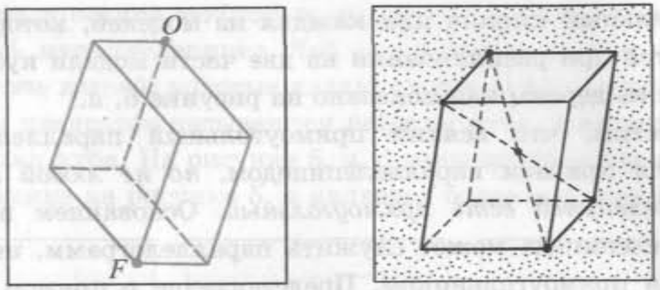
Рис. 6

Изображения параллелепипеда даны на рисунке 6, *б*, *в*.

Более наглядным изображением прямоугольного параллелепипеда является его изображение, данное на рисунке 6, *б*. Если основаниями параллелепипеда служат параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то он обозначается $ABCDA_1B_1C_1D_1$. При этом на рисунке вершины параллелепипеда обозначены так, что отрезки $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$ являются его боковыми ребрами (рис. 6, *в*).

Две вершины параллелепипеда, не принадлежащие одной грани, называются *противолежащими*. На рисунке 7, *а* отмечены противолежащие вершины $O$ и $F$ параллелепипеда.

Отрезок, соединяющий противолежащие вершины параллелепипеда, называется *диагональю* параллелепипеда. У параллелепипеда всего четыре диагонали. На рисунке 7, *б* изображены две диагонали параллелепипеда.




а) б)

Рис. 7

**4. Призма. Пирамида.** *Призма (n-угольная)* — это многогранник, у которого две грани — равные n-угольники, а остальные n граней — параллелограммы. Равные n-угольники называются *основаниями*, а параллелограммы — *боковыми гранями* призмы.

*Прямая призма* — это такая призма, у которой боковые грани — прямоугольники.

Представление о форме прямой призмы дают, например, модели, которые получаются в результате распиливания деревянного бруска, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, вдоль ребра, как показано на рисунке 8, *а*. При этом получаются две модели, одна из которых представляет собой модель прямой пятиугольной призмы, а другая — модель прямой треугольной призмы.

*Правильная n-угольная призма* — это призма, у которой все боковые грани — прямоугольники, а ее основания — правильные n-угольники.

Сумма площадей боковых граней призмы называется площадью ее *боковой поверхности* (обозначается $S_{\text{бок}}$).

Сумма площадей всех граней призмы называется *площадью поверхности* призмы (обозначается $S_{\text{полн}}$).

Если основания призмы есть n-угольники $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$, то она обозначается $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$. На изображении призмы вершины обозначаются так, что отрезки $A_1B_1$, $A_2B_2$, ..., $A_nB_n$ являются ее боковыми ребрами. На рисунке 8, *б* изображена треугольная призма, а на рисунке 8, *в* — четырехугольная, основания которой — четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, а ее боковые ребра — отрезки $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$.



*Пирамида (n-угольная)* — это многогранник, у которого одна грань — какой-нибудь n-угольник, а остальные n граней — треугольники с общей вершиной; n-угольник называется *основанием*; треугольники, имеющие общую вершину, называются *боковыми гранями*, а их общая вершина называется *вершиной пирамиды*. Стороны граней пирамиды называются ее *ребрами*, а ребра, сходящиеся в вершине, называются *боковыми*.


а) б) в)

Рис. 8

Пирамида, вершина которой — точка $S$, а основание — n-угольник $A_1A_2...A_n$, обозначается $SA_1A_2...A_n$.

Сумма площадей боковых граней пирамиды называется *площадью боковой поверхности* пирамиды (обозначается $S_{\text{бок}}$).

Сумма площадей всех граней пирамиды называется *площадью поверхности* пирамиды (площадь поверхности обозначается $S_{\text{полн}}$).

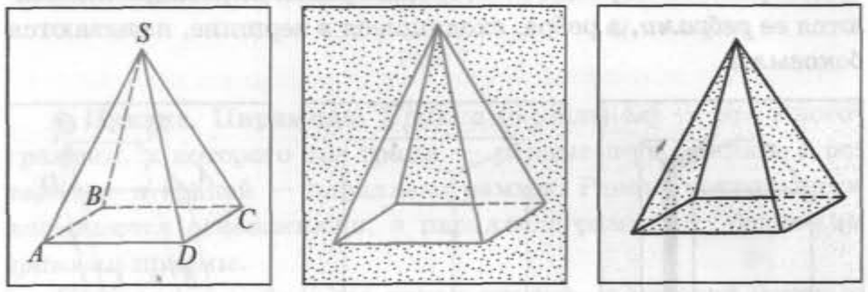
*Правильная пирамида* — это такая пирамида, основание которой — правильный n-угольник, а все боковые ребра равны между собой.

У правильной пирамиды боковые грани — *равные друг другу равнобедренные треугольники.*

Треугольная пирамида называется *правильным тетраэдром* (или *тетраэдром*), если все ее грани — *правильные треугольники*. Правильный тетраэдр является частным случаем правильной треугольной пирамиды.

Заметим, что не всякая правильная треугольная пирамида является правильным тетраэдром.

На рисунке 9, *а* дано изображение правильной четырехугольной пирамиды *SABCD*. Пространственная фигура, изображенная на рисунке 9, *б*, *в*, не является пирамидой, так как указанные треугольники и четырехугольник не ограничивают конечной части пространства.




а) б) в)

Рис. 9

В дальнейшем, если дано изображение какого-либо многогранника, иногда будем говорить, что дан многогранник.

При изучении стереометрии окажутся полезными ваши умения рисовать, изображать геометрические фигуры. Выполняя изображения фигур, вы будете развивать пространственные представления, которые вместе с логическими рассуждениями помогут вам находить новые свойства пространственных фигур. Знание этих свойств пригодится, независимо от того, какую профессию вы изберете, так как они находят широкое применение в строительстве, машиностроении, архитектуре и многих областях науки, техники и искусства.

## Вопросы и задачи к § 1

### I

1. Какие фигуры в стереометрии являются простейшими?

2. Верно ли, что за изображение прямоугольного треугольника можно принять любой треугольник?



3. Верно ли, что за изображение равностороннего треугольника можно принять любой треугольник?

4. Дайте описание многогранника.

5. Какой многогранник является: а) кубом; б) параллелепипедом; в) призмой?

6. Верно ли, что прямая призма является правильной? Верно ли, что призма, основаниями которой служат правильные *n*-угольники, есть правильная призма?

7. Охарактеризуйте прямоугольный параллелепипед.

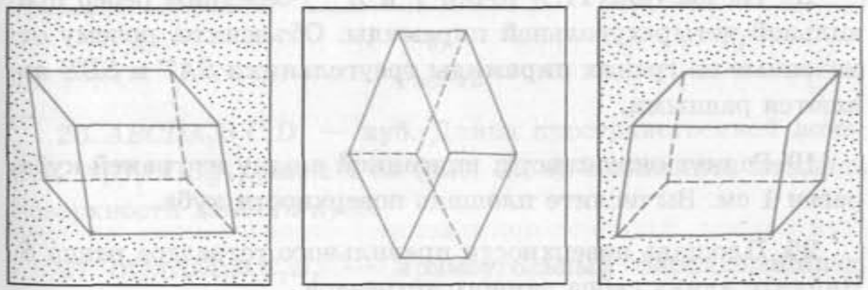
8. Что называется: а) площадью боковой поверхности призмы; б) площадью поверхности призмы?

9. Какой многогранник является пирамидой?

10. Верно ли, что пирамида, основание которой — правильный *n*-угольник, является правильной пирамидой?

11. В чем отличие правильного тетраэдра от правильной треугольной пирамиды?

12. Что называется: а) площадью боковой поверхности пирамиды; б) площадью поверхности пирамиды?



а) б) в)

Рис. 10

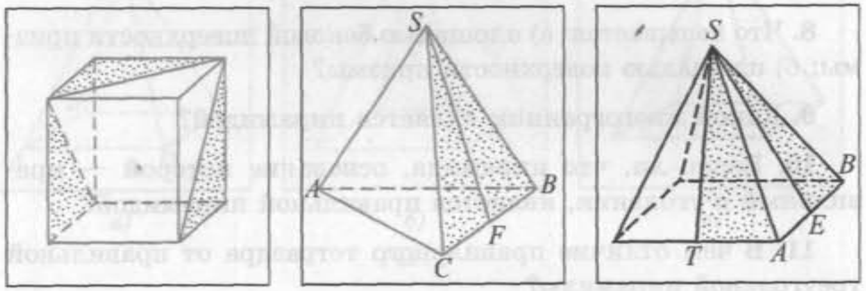
13. Поясните, почему изображения фигур, данные на рисунке 10, *а*, *б*, *в*, можно принять за изображение: а) параллелепипеда; б) прямоугольного параллелепипеда; в) куба.

14. Верно ли, что любые две боковые грани правильной *n*-угольной призмы — равные прямоугольники?

**15.** Верно ли, что любые две боковые грани правильной $n$-угольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники?

**16.** На рисунке 11, *а* выделены треугольники, принадлежащие граням куба. Можно ли утверждать, что каждые два из них — равные треугольники?

**17.** На рисунке 11, *б* отрезок $SF$ — медиана боковой грани $SCB$ правильной треугольной пирамиды $SABC$. Почему отрезок $SF$ является высотой треугольника $CSB$?




а) б) в)

Рис. 11

**18.** На рисунке 11, *в* точки $T$ и $E$ — середины ребер правильной четырехугольной пирамиды. Объясните, почему отмеченные на гранях пирамиды треугольники $SAT$ и $SBE$ являются равными.

**19.** Радиус окружности, вписанной в одну из граней куба, равен 1 см. Вычислите площадь поверхности куба.

**20.** Площадь поверхности правильного тетраэдра равна $S$. Найдите длину ребра данного тетраэдра.

**21.** Основание прямоугольного параллелепипеда — квадрат, длина диагонали которого равна $\sqrt{2}$ см. Вычислите длину диагонали боковой грани, если площадь боковой грани параллелепипеда равна 3 см$^2$.

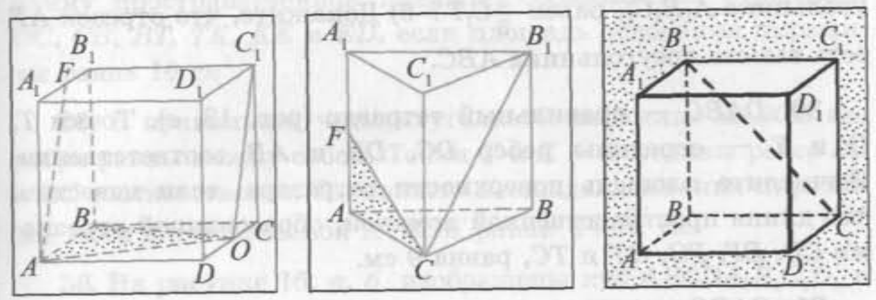
**22.** Изобразите в тетради правильную треугольную пирамиду и отметьте на этом изображении точку пересечения медиан какой-либо из ее граней.



**23.** Изобразите правильный тетраэдр и отрезок, соединяющий точки пересечения медиан двух его граней.

**24.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, точки $O$ и $F$ — середины ребер $DC$ и $A_1B_1$ соответственно, $BC = 2$ см. а) Докажите, что треугольник $AOB$ равнобедренный. б) Вычислите площадь треугольника $AA_1F$. в) Вычислите периметр треугольника $OCC_1$ (рис. 12, *а*).

**25.** $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, все ребра которой равны между собой, $F$ — середина ребра $AA_1$, $CB_1 = 2\sqrt{2}$ см. Вычислите: а) длину ребра призмы; б) площадь основания призмы; в) радиус окружности, описанной около треугольника $CAF$ (рис. 12, *б*).




а) б) в)

Рис. 12

**26.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Длина пространственной ломаной $A_1D_1DCB_1A_1$ равна 4 см (рис. 12, *в*). Вычислите площадь поверхности данного куба.

**27.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, основание которого — квадрат со стороной 3 см. Вычислите длину пространственной ломаной $AD_1B_1CA$, если длина бокового ребра параллелепипеда равна 4 см.

**28.** $ABCA_1B_1C_1$ прямая треугольная призма, основание которой — равнобедренный треугольник $ABC$ с прямым углом при вершине $B$ (рис. 13, *а*). Вычислите площадь грани $AA_1C_1C$, если $AB = 2$ см и $AA_1 = 3$ см.

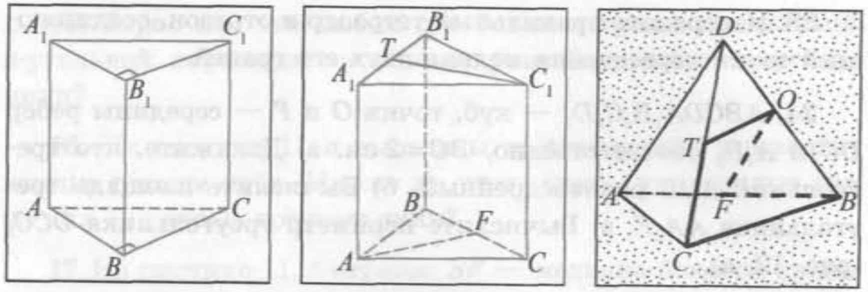



Рис. 13

**29.** $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма. Точки $T$ и $F$ — середины ребер $A_1B_1$ и $BC$ соответственно (рис. 13, *б*). а) Верно ли, что радиус окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, равен $\frac{2}{3}C_1T$? б) Докажите, что отрезок $AF$ есть высота треугольника $ABC$.

**30.** $DABC$ — правильный тетраэдр (рис. 13, *в*). Точки $T$, $O$ и $F$ — середины ребер $DC$, $DB$ и $AB$ соответственно. Вычислите площадь поверхности тетраэдра, если известно, что длина пространственной ломаной, образованной отрезками $CB$, $BF$, $FO$, $OT$ и $TC$, равна 9 см.

**31.** $SABC$ — правильная треугольная пирамида, боковое ребро которой в два раза больше стороны основания. Точки $T$, $K$, $P$, $E$ — середины ребер $SC$, $SB$, $BC$, $AC$ соответственно. Вычислите длину ломаной $TKBPET$, если сумма длин всех ребер пирамиды равна 18 см.

**32.** $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, все ребра которой равны между собой. Площадь основания призмы равна $4\sqrt{3}$ см². Вычислите длину пространственной ломаной $CABB_1C$ (рис. 14, *а*, *б*).

**33.** Боковое ребро правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в два раза больше стороны основания. Вычислите площадь боковой поверхности призмы, если длина ломаной, образованной отрезками $AA_1$, $A_1C$, $CB_1$, $B_1B$ и $BA$, равна $\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+2\right)$ см.



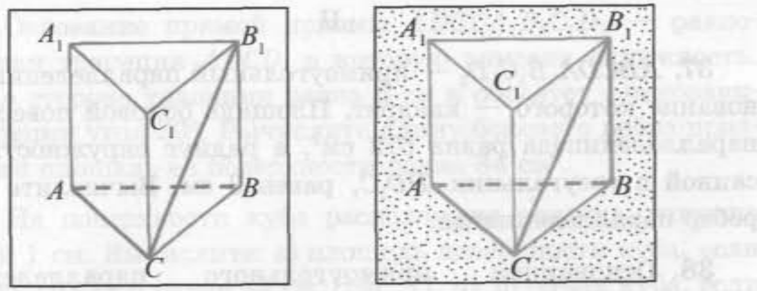



Рис. 14

**34.** $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой в два раза больше стороны основания. Точки $T$, $K$ и $E$ — середины ее ребер (рис. 15). Вычислите длину пространственной ломаной, образованной отрезками $DC$, $CB$, $BT$, $TK$, $KE$ и $ED$, если площадь основания пирамиды равна 16 см².

**35.** В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны между собой. Точки $T$ и $K$ — середины ребер $SC$ и $BC$ соответственно. Вычислите площадь основания пирамиды, если длина ломаной $KTSDK$ равна $4+\sqrt{5}$ см.

**36.** На рисунке 16, *а*, *б* изображены куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и его развертка, точка $F$ — середина ребра $AB$. Вычислите радиус окружности, вписанной в грань куба, если длина ломаной $A_1FDC_1A_1$ равна $2\left(\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)$ см.

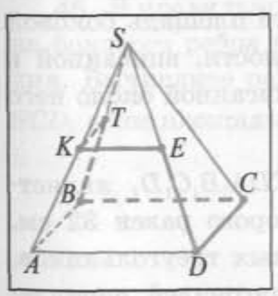



Рис. 15

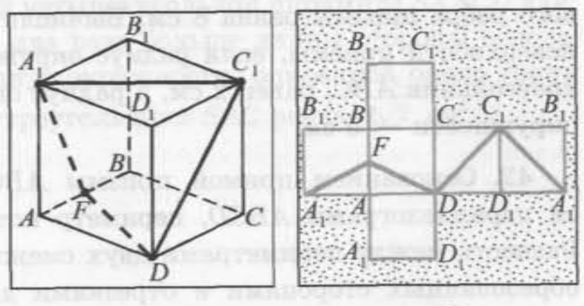



Рис. 16

## II

**37.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, основание которого — квадрат. Площадь боковой поверхности параллелепипеда равна 672 см$^2$, а радиус окружности, вписанной в треугольник $DD_1C$, равен 3 см. Вычислите длины ребер параллелепипеда.

**38.** Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат. Длина диагонали боковой грани параллелепипеда равна 13 см, а радиус окружности, вписанной в треугольник $DAA_1$, равен 2 см. Вычислите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

**39.** $TABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, длина бокового ребра которой равна 8 см. Точка $K$ — середина ребра $TC$. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды, если $DK = 6$ см.

**40.** Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды $TABCD$ равна $4\sqrt{15}$ см$^2$, а длина бокового ребра — 4 см. Вычислите площадь основания $ABCD$ пирамиды, если радиус окружности, вписанной в треугольник $TDC$, равен $\frac{\sqrt{15}}{5}$ см.

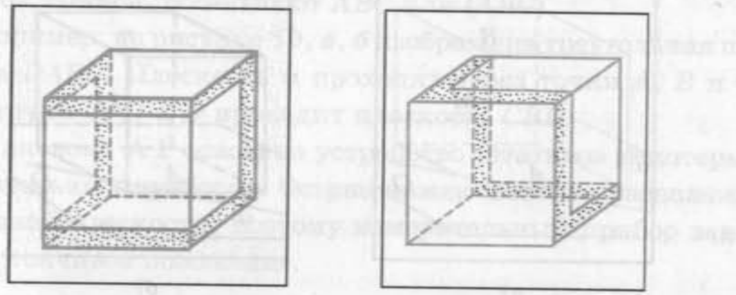
**41.** $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, основание которой — прямоугольный треугольник $ABC$. Длина бокового ребра призмы равна 8 см. Вычислите площадь боковой поверхности призмы, если радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC$, равен 2 см, а радиус описанной около него окружности — 5 см.

**42.** Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$, периметр которого равен 32 см. Разность между периметрами двух смежных треугольников, образованных сторонами и отрезками диагоналей параллелограмма $ABCD$, равна 8 см. Вычислите длины диагоналей боковых граней призмы, если площадь ее боковой поверхности равна 160 см$^2$.



**43.** Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — равнобедренная трапеция $ABCD$, в которую вписана окружность. Боковая сторона трапеции равна 6 см и образует с основанием трапеции угол 30°. Вычислите длину бокового ребра призмы, если площадь ее поверхности равна 84 см$^2$.

**44.** На поверхности куба расположена полоска, ширина которой 1 см. Вычислите: а) площадь поверхности куба, если площадь полоски равна 44 см$^2$ (рис. 17, *а*); б) объем куба, если площадь полоски равна 45 см$^2$ (рис. 17, *б*).



*а)* *б)*

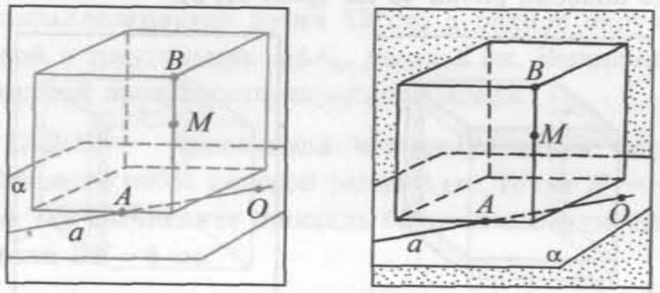
Рис. 17

**45.** $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны между собой. Точки $T$ и $F$ — середины ребер $SA$ и $SC$ соответственно. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды, если площадь треугольника $DTF$ равна $8\sqrt{5}$ см$^2$.

**46.** В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ длина бокового ребра в два раза больше длины стороны основания. Вычислите радиус окружности, описанной около грани $SCD$, если площадь треугольника $SAC$ равна $2\sqrt{7}$ см$^2$.

## § 2. Аксиомы стереометрии

В первом параграфе уже отмечалось, что в стереометрии основными фигурами являются точки, прямые и плоскости. Как и в планиметрии, точки обозначаются заглавными латинскими буквами $A$, $B$, $C$, ..., а прямые — строчными латинскими буквами $a$, $b$, $c$ ... или двумя заглавными латинскими буквами $AB$, $CE$ и т. д., плоскости — строчными буквами греческого алфавита $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и т. д.




а) б)

Рис. 18

Если точка $A$ лежит на прямой $a$ (в плоскости $\alpha$), то говорят, что прямая $a$ (плоскость $\alpha$) проходит через точку $A$, и пишут: $A \in a$ ($A \in \alpha$).

Если точка $B$ не лежит на прямой $a$ (в плоскости $\alpha$), то говорят, что прямая $a$ (плоскость $\alpha$) не проходит через точку $B$, и записывают: $B \notin a$ ($B \notin \alpha$).

Например, на рисунке 18, *а*, *б* изображены точки $A$ и $O$, лежащие на прямой $a$, и точки $B$ и $M$, которые не лежат в плоскости $\alpha$, где $\alpha$ — плоскость, в которой лежит грань куба (рис. 18, *а*, *б*).

Свойства геометрических фигур в пространстве устанавливаются путем логических рассуждений на основе некоторых утверждений (аксиом), которые принимаются без доказательств.

Аксиомы выражают свойства основных понятий стереометрии, соответствующие формам и отношениям, наблюдаемым в материальном мире и не вызывающим сомнений в их истинности в силу многовекового опыта практической деятельности людей.



Прежде чем приступить к изучению свойств пространственных фигур, рассмотрим некоторые свойства основных фигур — точек, прямых и плоскостей.

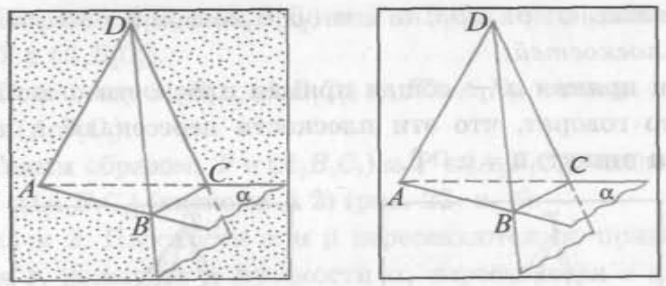
Сформулируем три аксиомы, выражающие свойства взаимного расположения точек, прямых и плоскостей в пространстве.

А 1. *Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость.*

Плоскость, проходящую через точки $A$, $B$ и $C$, не лежащие на одной прямой, обозначают $ABC$ или ($ABC$).

Например, на рисунке 19, *а*, *б* изображена треугольная пирамида $DABC$. Плоскость $\alpha$ проходит через точки $A$, $B$ и $C$; через точки $C$, $B$ и $D$ проходит плоскость $CBD$.

На аксиоме **А 1** основано устройство штативов некоторых измерительных приборов. Острие ножек штатива расположено в одной плоскости, поэтому измерительный прибор занимает устойчивое положение.




а) б)

Рис. 19

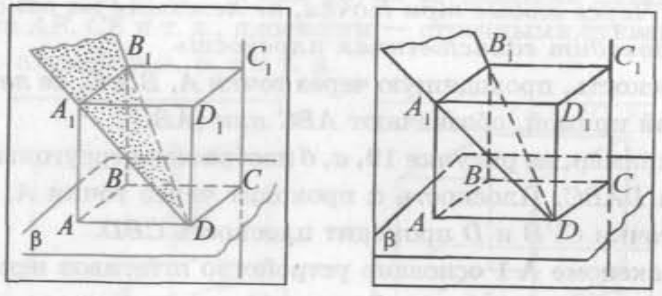
А 2. *Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.*

Если каждая точка прямой $a$ лежит в плоскости $\beta$, то говорят, что прямая $a$ лежит в плоскости $\beta$ или плоскость $\beta$ проходит через прямую $a$, и пишут $a \subset \beta$.

На рисунке 20, *а*, *б* ($ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб) $\beta$ — плоскость, проходящая через точки $A$, $D$ и $C$. Прямая $AD$ лежит в плоскости $\beta$, а прямые $DB_1$ и $CC_1$ в плоскости $\beta$ не лежат. Плоскость $DA_1B_1$ не проходит через прямую $AD$.

*Если прямая $a$ и плоскость $\alpha$ имеют только одну общую точку $O$, то говорят, что они пересекаются в точке $O$, и пишут: $O = a \cap \alpha$.*

На рисунке 20, *а*, *б* изображена прямая $CC_1$, которая пересекает плоскость $\beta$ в точке $C$, а прямая $DB_1$ — в точке $D$ ($D = \beta \cap DB_1$).

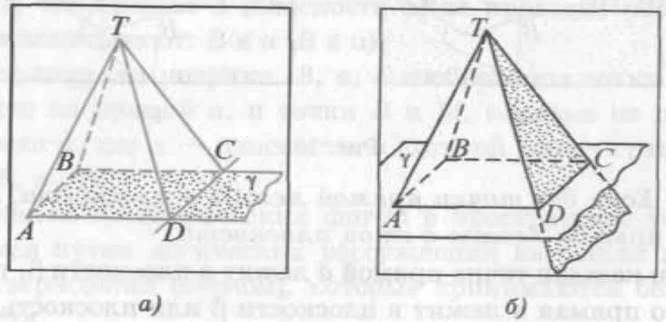



а) б)

Рис. 20

А 3. *Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.*

Если прямая $a$ — общая прямая плоскости $\alpha$ и плоскости $\beta$, то говорят, что эти плоскости пересекаются по прямой $a$, и пишут: $a = \alpha \cap \beta$.




а) б)

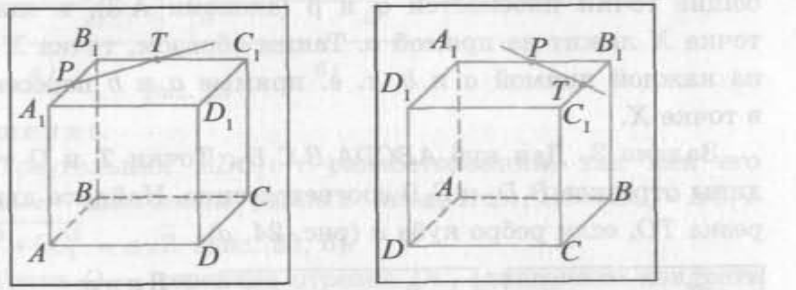
Рис. 21

Например, на рисунке 21, *а*, *б* $\gamma$ — плоскость, проходящая через вершины $A$, $D$ и $C$ *четырехугольной пирамиды* $TABCD$. Прямая $CD$ лежит в каждой из плоскостей $\gamma$ и $TDC$ (точки $C$ и $D$ лежат в каждой из этих плоскостей, значит,



по аксиоме А 2 прямая $CD$ — общая для плоскостей $\gamma$ и $TDC$), следовательно, указанные плоскости пересекаются по прямой $CD$, т. е. $CD = \gamma \cap (TDC)$.

**Задача 1.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точки $P$ и $T$ — середины ребер $A_1B_1$ и $B_1C_1$ соответственно. Докажите, что прямая $PT$ лежит в плоскости $A_1B_1C_1$.




а) б)

Рис. 22

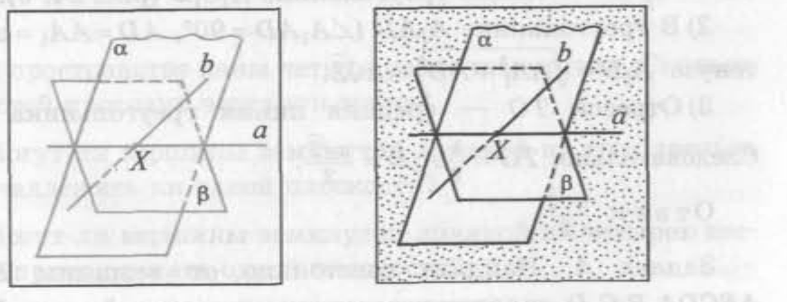
**Доказательство.**

1) Так как $B_1C_1 \subset (A_1B_1C_1)$ и $T \in B_1C_1$, то по аксиоме А 2 точка $T \in (A_1B_1C_1)$.

2) Поскольку $A_1B_1 \subset (A_1B_1C_1)$ и $P \in A_1B_1$, отсюда следует, что $P \in (A_1B_1C_1)$.

3) Таким образом, $T \in (A_1B_1C_1)$ и $P \in (A_1B_1C_1)$, следовательно, $PT \subset (A_1B_1C_1)$ (аксиома А 2) (рис. 22, *а*, *б*).

**Задача 2.** Плоскости $\alpha$ и $\beta$ пересекаются по прямой $a$, а прямая $b$, лежащая в плоскости $\alpha$, пересекается с плоскостью $\beta$. Докажите, что прямые $a$ и $b$ пересекаются.

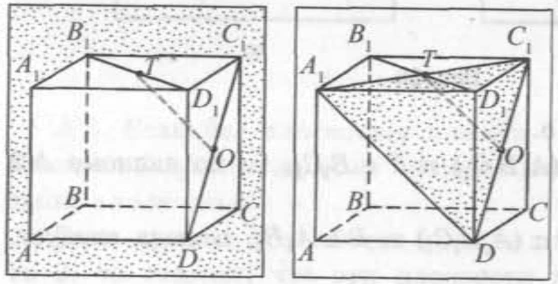



а) б)

Рис. 23

Доказательство. Пусть прямая $b$ и плоскость $\beta$ пересекаются в точке $X$ (рис. 23, *а, б*). Так как прямая $b$ лежит в плоскости $\alpha$, то каждая ее точка, а следовательно, и точка $X$ лежит в этой плоскости. Таким образом, точка $X$ — общая точка плоскостей $\alpha$ и $\beta$. Плоскости $\alpha$ и $\beta$ пересекаются по прямой $a$, поэтому на этой прямой лежат все общие точки плоскостей $\alpha$ и $\beta$ (аксиома **А 3**), а значит, и точка $X$ лежит на прямой $a$. Таким образом, точка $X$ лежит на каждой прямой $a$ и $b$, т. е. прямые $a$ и $b$ пересекаются в точке $X$.

Задача 3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки $T$ и $O$ — середины отрезков $B_1D_1$ и $C_1D$ соответственно. Найдите длину отрезка $TO$, если ребро куба $a$ (рис. 24, *а*).




*а)* *б)*

Рис. 24

Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $T \in B_1D_1$, $B_1T = TD_1$, $O \in DC_1$, $DO = OC_1$, $AD = a$.
Найти: длину $TO$.

Решение.

1) Точка $T$ есть точка пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$, т. е. середина отрезка $A_1C_1$. Следовательно, отрезок $TO$ — средняя линия треугольника $A_1C_1D$ (рис. 24, *б*).

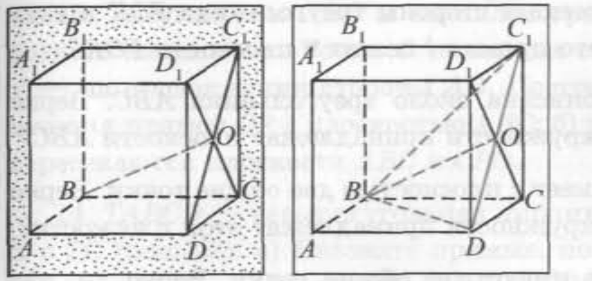
2) В треугольнике $A_1AD$ ($\angle A_1AD = 90°$, $AD = AA_1 = a$) гипотенуза $A_1D = \sqrt{AA_1^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$.

3) Отрезок $TO$ — средняя линия треугольника $A_1C_1D$. Следовательно, $TO = \frac{1}{2}A_1D = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Задача 4. Найдите расстояние от вершины $B$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ до точки пересечения диагоналей грани $DD_1C_1C$, если ребро куба равно $a$ (рис. 25, *а, б*).





*а)* *б)*

Рис. 25

Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $O = D_1C \cap DC_1$, $AD = a$.
Найти: длину $BO$.

Решение.

1) Треугольник $BDC_1$ — равносторонний, так как его стороны — диагонали равных квадратов: $BD = BC_1 = DC_1 = \sqrt{DC^2 + CC_1^2} = a\sqrt{2}$ (рис. 25, *б*).

2) Точка $O$ — середина отрезка $DC_1$ (диагонали квадрата точкой пересечения делятся пополам), следовательно, отрезок $BO$ есть медиана треугольника $BDC_1$.

3) Так как треугольник $BDC_1$ — равносторонний, то его медиана $BO$ является и высотой: $BO \perp DC_1$.

4) В треугольнике $BDO$ $\left(\angle BOD = 90°,\ BD = a\sqrt{2},\ DO = \frac{1}{2}DC_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ катет $BO = \sqrt{BD^2 - DO^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

## Вопросы и задачи к § 2

### I

1. Всегда ли через три точки проходит единственная плоскость?

2. В пространстве даны четыре различные точки. Сколько плоскостей проходит через эти точки?

3. Могут ли вершины замкнутой ломаной из трех звеньев не принадлежать ни одной плоскости?

4. Могут ли вершины замкнутой ломаной из четырех звеньев не принадлежать одной плоскости?

5. Верно ли, что прямая лежит в плоскости, если две ее точки лежат в этой плоскости?

**6.** Прямая $l$ пересекает стороны треугольника $FOK$ в двух точках. Верно ли, что прямая $l$ лежит в плоскости $FOK$?

**7.** Окружность описана около треугольника $ABC$. Верно ли, что все точки окружности принадлежат плоскости $ABC$?

**8.** Окружность имеет с плоскостью две общие точки. Верно ли, что все точки окружности принадлежат этой плоскости?

**9.** Две плоскости имеют две общие точки. Верно ли, что эти плоскости имеют общую прямую?

**10.** На рисунке 26, *а*, *б* изображена треугольная пирамида $DABC$, $T \in AD$, $F \in DB$, $O \in CB$. а) Назовите прямые, на которых лежит точка $F$. б) Докажите, что прямая $CT$ лежит в плоскости $ACD$. в) Верно ли, что прямая $OF$ лежит в плоскости $DBC$? г) Назовите прямые, через которые проходит плоскость $ADB$.

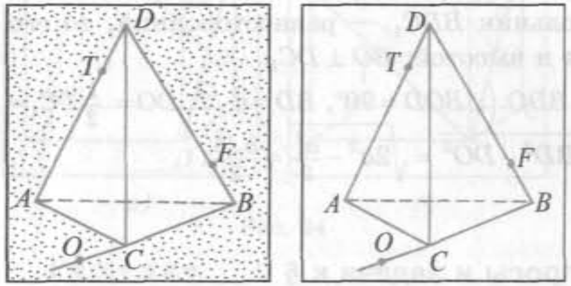



Рис. 26

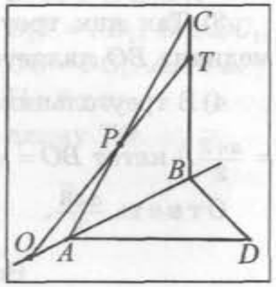



Рис. 27

**11.** Дана треугольная пирамида $DABC$. Точка $T$ лежит на ребре $DB$, а точка $E$ — на продолжении ребра $DC$. Постройте: а) точку пересечения прямой $TE$ и плоскости $ABC$; б) прямую, по которой пересекаются плоскости $ATE$ и $ABC$.

**12.** Треугольники $ABC$ и $ABD$ не лежат в одной плоскости (рис. 27). $O \in AB$, $T \in CB$, $P = AC \cap OT$. а) Назовите точку пересечения прямой $PT$ и плоскости $ABD$. б) По какой прямой пересекаются плоскости $TPD$ и $ABD$? в) Докажите, что прямая $TD$ лежит в плоскости $CBD$. г) Докажите, что точка $O$ лежит в плоскости $TPD$.



**13.** Треугольник $ABC$ и параллелограмм $ABED$ лежат в разных плоскостях. Точка $O$ лежит на стороне $DE$, а точка $P$ — на продолжении стороны $AD$. Постройте: а) точку пересечения прямой $OP$ с плоскостью $ABC$; б) прямую, по которой пересекаются плоскости $ABC$ и $CPO$.

**14.** $TABCD$ — четырехугольная пирамида, $K \in AT$, $O \in TC$, $E \in TC$ (рис. 28). а) Назовите прямые, по которым пересекаются плоскости $ABT$ и $TBC$, $TBE$ и $TDC$. б) Докажите, что прямая $KO$ лежит в плоскости $ATC$. в) Верно ли, что прямая $EK$ лежит в плоскости $ATC$?

**15.** Точки $T$ и $K$ — середины ребер $AD$ и $DC$ пирамиды $PABCD$ соответственно, основание которой есть четырехугольник $ABCD$. Постройте: а) точку пересечения прямой $KT$ и плоскости $PBC$; б) прямую, по которой пересекаются плоскости $PTK$ и $PBC$.

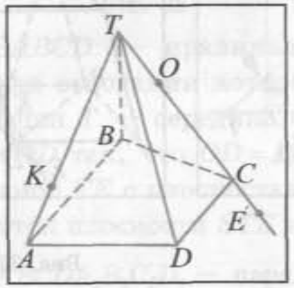



Рис. 28

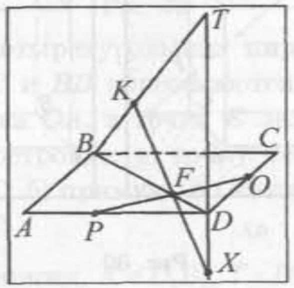



Рис. 29

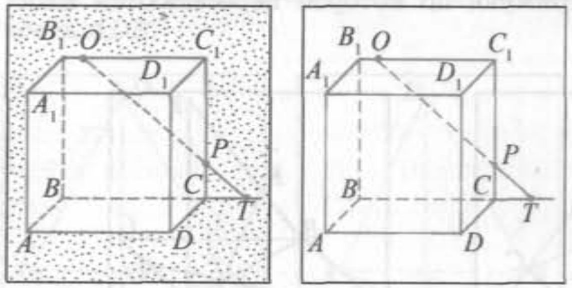
**16.** На рисунке 29 изображены параллелограмм $ABCD$ и треугольник $BTD$, не лежащие в одной плоскости. а) Назовите точку пересечения прямой $PO$ и плоскости $BDT$. б) По какой прямой пересекаются плоскости $TPO$ и $BDT$? в) Верно ли, что прямая $KX$ лежит в плоскости $BDT$?

**17.** Параллелограммы $ABCD$ и $ABEF$ не лежат в одной плоскости. Точки $K$ и $O$ — середины отрезков $CB$ и $BE$ соответственно. а) Постройте точку $X = AK \cap (DCE)$. б) Постройте точку пересечения прямой $EF$ и плоскости $AOK$. в) Докажите, что прямая $KO$ лежит в плоскости $CBE$.

**18.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 30, *а*, *б*), $O \in B_1C_1$, $P \in CC_1$. а) Докажите, что прямая $OP$ лежит в плоскости $B_1BC$. б) Верно ли, что плоскости $ABB_1$ и $ABC$ пересекаются по прямой $AB$? в) Назовите точку пересечения прямой $OP$ и плоскости $ADC$.

**19.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки $T$ и $E$ — середины ребер $AB$ и $AD$ соответственно. Постройте: а) точку пересечения прямой $TE$ и плоскости $D_1DC$; б) прямую, по которой пересекаются плоскости $TEC$ и $DCC_1$.

**20.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $K \in DD_1$, $E = C_1K \cap CD$, $O = B_1K \cap BD$ (рис. 31). а) Назовите точку пересечения прямой $B_1K$ с плоскостью $ADC$. б) В какой точке прямая $C_1E$ пересекает плоскость $ADD_1$? в) Верно ли, что плоскость $B_1C_1K$ пересекает плоскость $ABC$ по прямой $EO$?




а) б)

Рис. 30

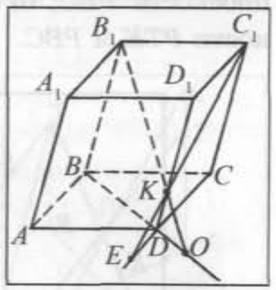



Рис. 31

**21.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Точки $E$ и $K$ — середины ребер $AA_1$ и $AD$ соответственно. Постройте: а) точку пересечения прямой $EK$ и плоскости $B_1A_1D_1$; б) прямую, по которой пересекаются плоскости $EKB_1$ и $B_1A_1D_1$.

**22.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $O \in BB_1$, $K \in DD_1$, $T \in CC_1$, $X = OT \cap B_1C_1$, $F = KT \cap D_1C_1$ (рис. 32). а) Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости $OTK$ и $B_1C_1D_1$. б) В какой точке прямая $A_1B_1$ пересекает плоскость $OTK$? в) Верно ли, что плоскости $OTK$ и $A_1B_1B$ пересекаются по прямой $OP$?

**23.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки $T$, $K$ и $O$ — середины отрезков $A_1B_1$, $B_1C_1$ и $DC_1$ соответственно. Постройте: а) точку



пересечения прямой $KT$ с плоскостью $DD_1C_1$; б) прямую, по которой пересекаются плоскости $TKO$ и $DD_1C_1$.

**24.** $SABCD$ — четырехугольная пирамида, $O \in SC$, $T \in SD$, $E \in SA$, $P = AC \cap OE$, $K = DC \cap OT$ (рис. 33). а) Докажите, что прямая $EO$ лежит в плоскости $SAC$. б) Назовите точку пересечения прямой $OK$ с плоскостью $SAD$. в) Верно ли, что прямая $EO$ пересекает плоскость $ABC$ в точке $P$? г) Докажите, что плоскости $KOP$ и $SAD$ пересекаются по прямой $ET$.

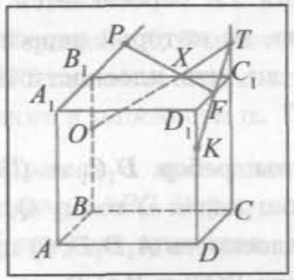



Рис. 32

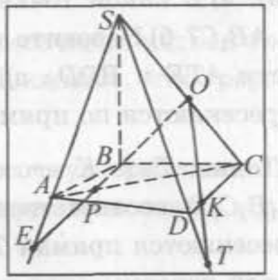
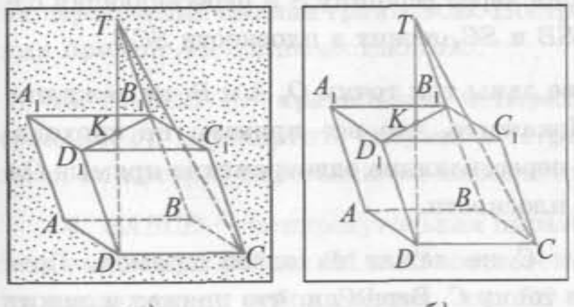



Рис. 33

**25.** $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, диагонали основания которой $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $O$. Точка $T$ — середина отрезка $OA$, а точка $E$ лежит на прямой $OD$ так, что $OD = DE$. Постройте: а) точку пересечения прямой $TE$ с плоскостью $SBC$; б) прямую, по которой пересекаются плоскости $STE$ и $SBC$.

**26.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $K \in D_1B_1$, $T = DK \cap BB_1$ (рис. 34, *а*, *б*). а) Докажите, что прямая $TD$ и плоскость $D_1B_1C_1$ пересекаются в точке $K$. б) Назовите прямую, по которой пе-




а) б)

Рис. 34

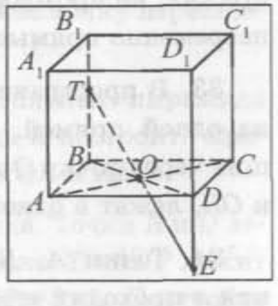



Рис. 35

ресекаются плоскости $TDC$ и $BB_1C_1$. в) Верно ли, что плоскости $DCT$ и $BC_1C$ пересекаются по прямой $TC$?

**27.** Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте: а) точку $O$ пересечения плоскости $AB_1C$ с прямой $BD$; б) точку пересечения прямой $DD_1$ и прямой $B_1O$; в) прямую, по которой пересекаются плоскости $AB_1C$ и $DCC_1$.

**28.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $T \in BB_1$, $O = BD \cap AC$, $E = TO \cap DD_1$ (рис. 35). а) В какой точке прямая $TE$ пересекается с плоскостью $AB_1C$? б) Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости $ATE$ и $BDD_1$. в) Верно ли, что плоскости $AA_1B_1$ и $ATE$ пересекаются по прямой $AT$?

**29.** Точки $T$ и $K$ — середины ребер $D_1C_1$ и $C_1C$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно. Постройте: а) точку $Q$, в которой пересекаются прямая $TK$ и плоскость $A_1D_1D$; б) прямую, по которой пересекаются плоскости $BQT$ и $B_1C_1D_1$.

**30.** Дана треугольная пирамида $SABC$. Докажите, что любая прямая, проходящая через вершину $B$ и пересекающая прямую $SC$, лежит в плоскости $SBC$.

**31.** В пространстве даны три точки $O$, $A$ и $B$, не лежащие на одной прямой. Докажите, что все прямые, проходящие через точку $O$ и пересекающие прямую $AB$, лежат в одной плоскости.

**32.** $SABC$ — треугольная пирамида. Докажите, что любая прямая, не проходящая через вершину S и пересекающая одновременно прямые $SB$ и $SC$, лежит в плоскости $SCB$.

**33.** В пространстве даны три точки $O$, $A$ и $B$, не лежащие на одной прямой. Докажите, что все прямые, не проходящие через точку O и пересекающие одновременно прямые $OA$ и $OB$, лежат в одной плоскости.

**34.** Точки $A$, $B$ и $C$ не лежат на одной прямой. Прямая $a$ проходит через точку $C$. Верно ли, что прямая $a$ лежит в плоскости $ABC$? Приведите примеры.



**35.** Треугольник $ABC$ лежит в плоскости $\alpha$. Прямая $a$ пересекает одновременно прямые $AB$ и $BC$. Верно ли, что прямая $a$ лежит в плоскости $ABC$?

**36.** Дана треугольная пирамида $TABC$. Точки $O$ и $E$ — середины ребер $TC$ и $TB$ соответственно. Докажите, что каждая точка прямой $OE$ лежит в плоскости $TCB$.

**37.** Все точки медианы $AE$ треугольника $ABC$ лежат в плоскости $\alpha$. Верно ли, что плоскости $ABC$ и $\alpha$ совпадают?

**38.** Вершины $A$, $B$ и точка $O$ пересечения медиан треугольника $ABC$ лежат в плоскости $\alpha$. Докажите, что треугольник $ABC$ лежит в плоскости $\alpha$.

**39.** Прямая $a$ проходит через точку пересечения медиан треугольника $ABC$. Верно ли, что прямая $a$ лежит в плоскости $\alpha$? Приведите примеры.

**40.** Две смежные вершины и точка пересечения диагоналей параллелограмма лежат в плоскости $\alpha$. Докажите, что две другие вершины параллелограмма лежат в этой плоскости.

## II

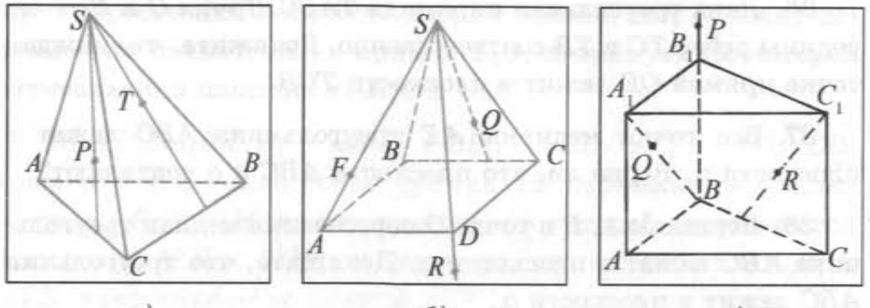
**41.** $SABC$ — треугольная пирамида. Точки $P$ и $T$ лежат в гранях $SAC$ и $SBC$ соответственно (рис. 36, *а*). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте точку пересечения прямой $PT$ с плоскостью $SAB$.

**42.** $SABCD$ — четырехугольная пирамида. Точка $O$ — точка пересечения медиан грани $SCD$. Постройте точку пересечения прямой $AO$ с плоскостью $SBC$.

**43.** $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида (рис. 36, *б*). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте прямую, по которой пересекаются плоскости $FQR$ и $ABC$.

**44.** $SABCD$ — четырехугольная пирамида. Точки $R$ и $Q$ лежат на боковых ребрах $SA$ и $SB$ соответственно. Точка $P$ лежит на продолжении ребра $BC$ так, что $BC : CP = 2 : 1$. Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости $PQR$ и $SCD$.

**45.** $ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма (рис. 36, *в*). Перечертите рисунок в тетрадь. Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости $PQR$ и $A_1AC$.




*а)* *б)* *в)*

Рис. 36

**46.** Докажите, что любой треугольник, одна из сторон которого есть ребро куба, а противолежащая ей вершина — вершина куба, является прямоугольным.

**47.** Площадь грани куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна $S$. Найдите площадь поверхности четырехугольной пирамиды $OA_1B_1C_1D_1$, где точка $O$ — точка пересечения диагоналей грани $ABCD$.

**48.** В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длина стороны основания равна $a$. Найдите площадь поверхности призмы, если угол при вершине $C_1$ треугольника $BC_1D$ равен $\alpha$.

**49.** Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 2 см. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник $B_1AD$.

**50.** $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, длина бокового ребра которой равна 6 см, а длина стороны основания — 4 см. Вычислите площадь треугольника $ACB_1$.

**51.** Точка $T$ — середина ребра $DD_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $A_1C_1T$, если длина ребра куба равна $a$.

## § 3. Следствия из аксиом

Из курса планиметрии известно, что утверждение, справедливость которого обосновывается путем логических рассуждений, называется теоремой, а само обоснование — доказательством. Докажем некоторые следствия из аксиом. Доказать теорему — значит путем рассуждений обосновать, что она следует из некоторых аксиом или ранее доказанных теорем. Очевидность не является критерием справедливости теорем, поэтому в процессе доказательств, обращаясь к рисункам, будем одновременно следить за правильностью рассуждений, чтобы быть уверенными в справедливости сделанных выводов.

Теорема 1. *Через прямую и не лежащую на ней точку проходит единственная плоскость.*

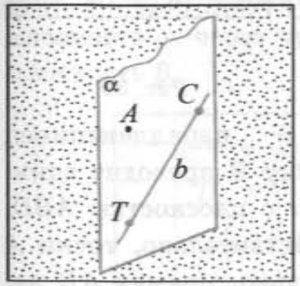



Рис. 37

Дано: Точка $A$ не принадлежит прямой $b$.

Доказать:

существует единственная плоскость, проходящая через точку $A$ и прямую $b$.

**Доказательство.**

**I.** *Докажем, что такая плоскость существует.*

1) Пусть точка $A$ не лежит на прямой $b$ ($A \notin b$).

2) Отметим на прямой $b$ две точки $T$ и $C$.

3) Точки $A$, $T$ и $C$ не лежат на одной прямой, следовательно, по аксиоме **А 1** через эти точки проходит некоторая плоскость $\alpha$ ($A \in \alpha$, $T \in \alpha$, $C \in \alpha$) (рис. 37).

4) Точки $T$ и $C$ прямой $b$ лежат в плоскости $\alpha$, значит, по аксиоме **А 2** плоскость $\alpha$ проходит через точку $A$ и прямую $b$ ($A \in \alpha$, $b \subset \alpha$) (см. рис. 37).

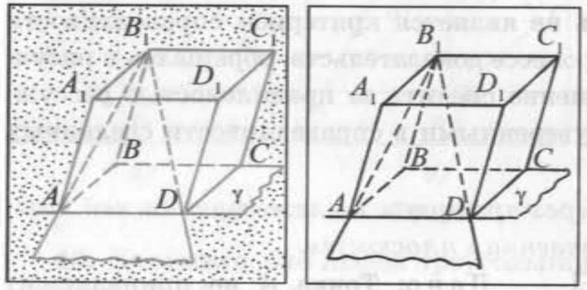
**II.** *Докажем единственность этой плоскости.*

1) Допустим, что существует еще одна плоскость $\beta$, проходящая через точку $A$ и прямую $b$.

2) Так как плоскость $\beta$ проходит через прямую $b$, а точки $T$ и $C$ лежат на прямой $b$, то плоскость $\beta$ проходит через точки $A$, $T$ и $C$, не лежащие на одной прямой.

3) По аксиоме **А 1** существует только одна плоскость, проходящая через точки $A$, $T$ и $C$, не лежащие на одной прямой. Следовательно, плоскость $\beta$ совпадает с плоскостью $\alpha$.

Теорема доказана.




а) б)

Рис. 38

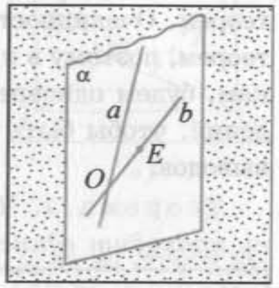



Рис. 39

Например, пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед (рис. 38, *а*, *б*). Через прямую $AD$ и точку $B$ проходит единственная плоскость $\gamma$, которая совпадает с плоскостью $ABD$, проходящей через точки $A$, $B$ и $D$. Действительно, точки $A$ и $D$ лежат в плоскости $ABD$, следовательно, прямая $AD$ лежит в этой плоскости (аксиома **А 2**). Плоскость $ABD$ проходит через точку $B$ и прямую $AD$, следовательно, она совпадает с плоскостью $\gamma$, так как по теореме 1 такая плоскость — единственная.

Через прямую $AD$ и точку $B_1$ проходит единственная плоскость $ADB_1$. Плоскости $\gamma$ и $ADB_1$ пересекаются по прямой $AD$ (см. рис. 38, *а*, *б*).

Теорема 2. *Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.*

Доказательство.

I. *Докажем существование плоскости.*

1) Пусть прямые $a$ и $b$ пересекаются в точке $O$ ($O = a \cap b$), $E$ — некоторая точка на прямой $b$, не совпадающая с точкой $O$ (рис. 39).



2) Тогда по теореме 1 существует плоскость $\alpha$, проходящая через точку $E$ и прямую $a$ ($E \in \alpha$, $a \subset \alpha$).

3) Точки $O$ и $E$ прямой $b$ лежат в плоскости $\alpha$, следовательно, по аксиоме **А 2** плоскость $\alpha$ проходит через прямую $b$. Таким образом, существует плоскость $\alpha$, проходящая через прямые $a$ и $b$.

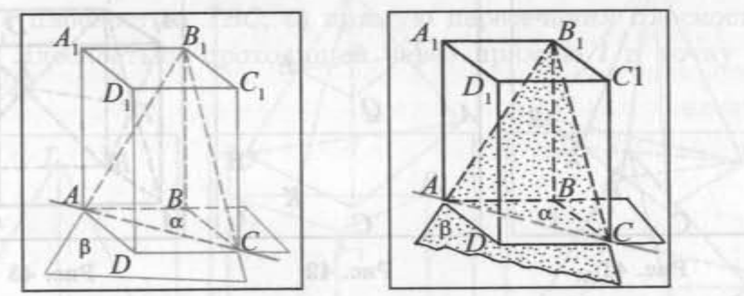
II. *Докажем, что такая плоскость единственная.*

1) Допустим, что существует еще одна плоскость $\beta$, проходящая через прямые $a$ и $b$.

2) Точка $E$ лежит на прямой $b$, следовательно, плоскость $\beta$ проходит через точку $E$ и прямую $a$. По теореме 1 через точку $E$ и прямую $a$ проходит единственная плоскость, значит, плоскость $\beta$ совпадает с плоскостью $\alpha$.

Теорема доказана.

Например, пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед (рис. 40, *а*, *б*). Через прямые $AD$ и $DC$ проходит единственная плоскость $\alpha$, через прямые $AB_1$ и $B_1C$ проходит единственная плоскость $\beta$.




а) б)

Рис. 40

Плоскости $\alpha$ и $\beta$ пересекаются по прямой $AC$ ($AC = \alpha \cap \beta$).

В заключение подчеркнем, что в силу теорем **1** и **2** возможны еще два способа задания плоскости: а) существует единственная плоскость, проходящая через прямую и не принадлежащую ей точку; б) существует единственная плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые.

## Вопросы и задачи к § 3

**1.** Верно ли, что через любые три точки проходит плоскость, и притом только одна?

**2.** Проиллюстрируйте на примерах геометрических фигур, что не всякие четыре точки лежат в одной плоскости.

**3.** Верно ли, что через прямую и точку, ей не принадлежащую, проходит единственная плоскость?

**4.** Даны две пересекающиеся прямые. Всякая ли третья прямая, имеющая с каждой из данных прямых одну общую точку, лежит с ними в одной плоскости?

**5.** $DABC$ — треугольная пирамида, точки $F$ и $K$ лежат на ребре $BC$ (рис. 41). Назовите плоскости, проходящие через прямую $AD$.

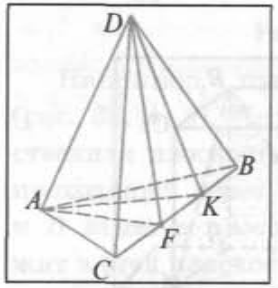



Рис. 41

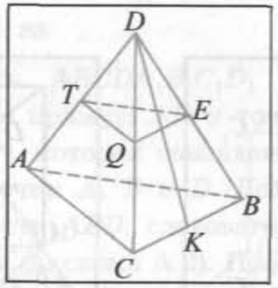



Рис. 42

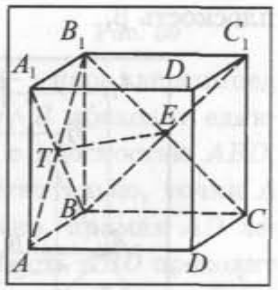



Рис. 43

**6.** Верно ли, что через любую прямую и точку проходит единственная плоскость?

**7.** В пространстве даны прямая $a$ и не лежащая на ней точка $O$. Докажите, что все прямые, проходящие через точку $O$ и пересекающие прямую $a$, лежат в одной плоскости.

**8.** Прямые $a$, $b$ и $c$ попарно пересекаются и не имеют общей точки. Докажите, что они лежат в одной плоскости.

**9.** Точки $A$, $B$, $C$ и $F$ не лежат в одной плоскости. Могут ли прямые $AB$ и $CF$ пересекаться? Дайте обоснование ответа.



**10.** Точки $T$, $Q$ и $E$ — середины боковых ребер правильного тетраэдра $DABC$ (рис. 42). Найдите длину медианы $DK$ треугольника $BCD$, если периметр треугольника $TQE$ равен 3 см.

**11.** Докажите, что если прямые $AB$ и $CD$ лежат в одной плоскости, то и прямые $AC$ и $BD$ лежат в одной плоскости.

**12.** Две прямые $a$ и $b$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что все прямые, не проходящие через точку $O$ и пересекающие каждую из данных прямых, лежат в одной плоскости.

**13.** Верно ли, что прямая лежит в плоскости данного треугольника, если она пересекает две стороны треугольника?

**14.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 43). Длина отрезка $TE$ равна 5 см. Вычислите длину ребра куба.

**15.** $TABC$ — треугольная пирамида. Точка $P$ лежит на ребре $TB$, а прямая $l$ лежит в плоскости $TAC$. Перечертите рисунок в тетрадь и постройте: а) точку пересечения прямой $l$ с плоскостью $TBC$; б) прямую пересечения плоскости $TBC$ с плоскостью, проходящей через прямую $l$ и точку $P$ (рис. 44).

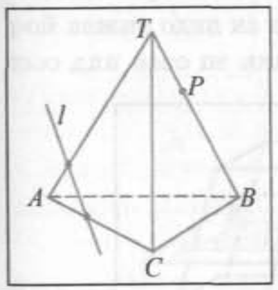



Рис. 44

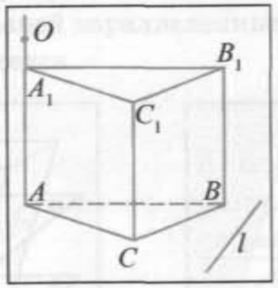



Рис. 45

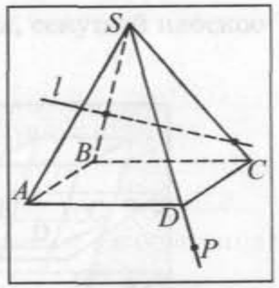



Рис. 46

**16.** $ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма. Точка $O$ лежит на продолжении ребра $AA_1$, а прямая $l$ — в плоскости $ABC$ (рис. 45). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте: а) точки пересечения прямой $l$ с плоскостями $A_1B_1B$ и $AA_1C$; б) прямую пересечения плоскости $A_1B_1C_1$ с плоскостью, проходящей через прямую $l$ и точку $O$.

**17.** $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. Прямая $l$ лежит в плоскости $SBC$, а точка $P$ — на продолжении ребра $SD$ (рис. 46). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте: а) точку пересечения прямой $l$ с плоскостью основания; б) прямую пересечения плоскости основания с плоскостью, проходящей через прямую $l$ и точку $P$.

**18.** Точки $P$, $T$ и $K$ — середины ребер $SC$, $AD$ и $AB$ четырехугольной пирамиды $SABCD$ соответственно. Постройте прямую, по которой пересекается плоскость $SAD$ с плоскостью, проходящей через точку $P$ и прямую $TK$.

**19.** $DABC$ — треугольная пирамида, точка $F$ принадлежит ребру $AD$ и не совпадает с вершинами пирамиды, а точка $O$ лежит на прямой $DB$. Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости $ABC$ и $FOC$. Рассмотрите возможные случаи расположения точки $O$ на прямой $DB$.

**20.** $TABC$ — треугольная пирамида, точка $P$ принадлежит ребру $AC$ и не совпадает с вершинами пирамиды, а точка $F$ лежит на прямой $CB$. Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости $TAB$ и $TPF$. Рассмотрите возможные случаи.

## § 4. Построение сечений многогранников плоскостью

Для решения задач по стереометрии часто необходимо умение строить на рисунке сечения многогранников (например, пирамиды, параллелепипеда, куба, призмы) некоторой плоскостью. Поясним, что понимается под сечением.

*Секущей плоскостью* пирамиды (призмы, параллелепипеда, куба) называется такая плоскость, по обе стороны от которой есть точки данной пирамиды (призмы, параллелепипеда, куба).

*Сечением* пирамиды (призмы, параллелепипеда, куба) называется фигура, состоящая из всех точек, которые являются общими для пирамиды (призмы, параллелепипеда, куба) и секущей плоскости.

Секущая плоскость пересекает грани пирамиды (параллелепипеда, призмы, куба) по отрезкам, поэтому *сечение есть многоугольник*, лежащий в секущей плоскости, сторонами которого являются указанные отрезки.

Например, на рисунке 47, *а*, *б* изображен параллелепипед и секущая плоскость $\alpha$. Сечением параллелепипеда этой плоскостью служит четырехугольник $ABCD$. Плоскость $\beta$, в которой лежит одна из граней параллелепипеда, секущей плоскостью для него не является.

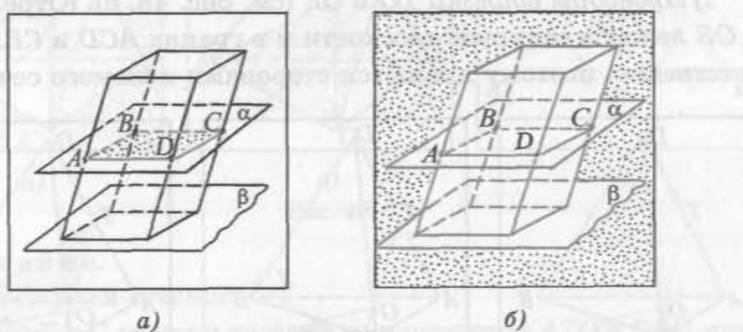



Рис. 47

Для построения сечения пирамиды (призмы, параллелепипеда, куба), а точнее, его изображения, можно построить точки пересечения секущей плоскости с ребрами пирамиды (призмы, параллелепипеда, куба) и соединить каждые две из них, лежащие в одной грани.

Заметим, что последовательность построения вершин и сторон сечения не существенна, но выполнять построения необходимо с учетом аксиом и теорем стереометрии, а также правил изображения фигур. Подчеркнем, что в основе построения сечений многогранников лежат две задачи на построение: а) линии пересечения двух плоскостей; б) точки пересечения прямой и плоскости.

а) Для построения прямой, по которой пересекаются некоторые две плоскости $\alpha$ и $\beta$ (например, секущая плоскость и плоскость грани многогранника), нужно построить две их общие точки, тогда прямая, проходящая через эти точки, есть линия пересечения плоскостей $\alpha$ и $\beta$.

б) Для построения точки пересечения прямой $l$ и плоскости $\alpha$ нужно построить точку пересечения прямой $l$ и прямой $l_1$, по которой пересекаются плоскость $\alpha$ и любая плоскость, содержащая прямую $l$.

Задача 1. На ребрах $AD$, $DC$ и $CB$ треугольной пирамиды $DABC$ даны точки $T$, $O$ и $E$ соответственно. Точка $O$ не является серединой ребра $DC$ (рис. 48, *а*, *б*, *в*). Постройте сечение пирамиды плоскостью $TOE$.

Решение.

1) *Проводим отрезки $TO$ и $OE$* (см. рис. 48, *а*). (Отрезки $TO$ и $OE$ лежат в секущей плоскости и в гранях $ACD$ и $CBD$ соответственно, поэтому являются сторонами искомого сечения.)

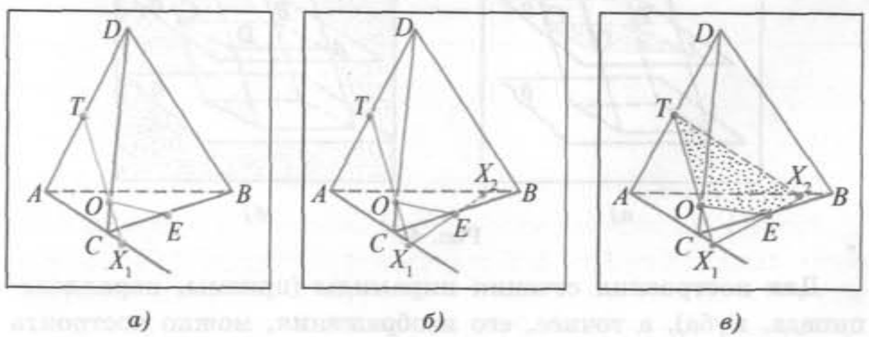



Рис. 48



2) *Находим точку $X_1$, в которой пересекаются прямые $AC$ и $TO$*: $X_1 = AC \cap TO$ (см. рис. 48, *б*). (Прямые $AC$ и $TO$ лежат в одной плоскости и не являются параллельными, следовательно, пересекаются в точке $X_1$.)

3) *Отметим точку $X_2$ пересечения прямых $X_1E$ и $AB$*: $X_2 = X_1E \cap AB$ (см. рис. 48, *в*). ($X_1 \in (ABC)$, $X_1 \in (TOE)$, кроме того, $E \in (ABC)$ и ($E \in TOE$), значит, эти плоскости пересекаются по прямой $X_1E$. Прямые $X_1E$ и $AB$ лежат в одной плоскости $ABC$ и не параллельны, следовательно, пересекаются в точке $X_2$.)

4) *Проводим отрезок $X_2T$* (см. рис. 48, *в*). (Точка $X_2$ лежит в секущей плоскости $TOE$ и на ребре $AB$. Следовательно, плоскость $TOE$ пересекает грани $ACB$ и $ABD$ по отрезкам $EX_2$ и $X_2T$ соответственно.)

Четырехугольник $TOEX_2$ — искомое сечение.

Задача 2. Точка $T$ — середина ребра $DB$ правильного тетраэдра $DABC$ (рис. 49, *а*, *б*). Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки $A$, $C$ и $T$. Вычислите радиус окружности, вписанной в это сечение, если длина ребра данного тетраэдра равна 2 см.

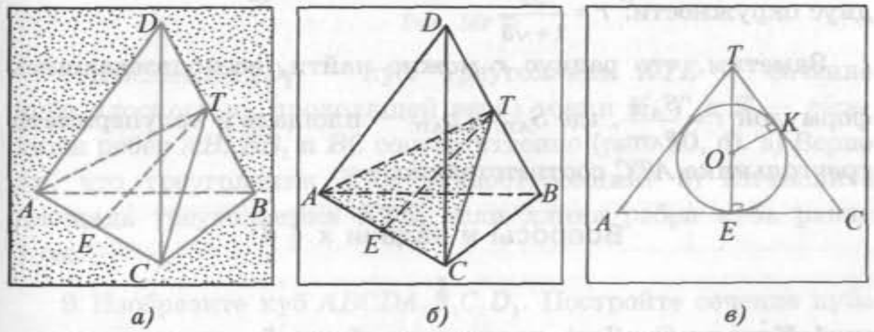



Рис. 49

Решение.

I. *Построим сечение.*

Точки $T$ и $C$ лежат в каждой из плоскостей $ATC$ и $DBC$, следовательно, плоскость $ATC$ пересекает плоскость $DBC$ по прямой $TC$, а значит, грань $DBC$ — по отрезку $TC$. Аналогично получаем, что секущая плоскость $ATC$ пересекает грань $ADB$ по отрезку $AT$, а каждую из граней $ADC$ и $ABC$ — по отрезку $AC$.

Таким образом, треугольник $ATC$ — искомое сечение данного тетраэдра $DABC$ (см. рис. 49, *а*, *б*).

II. *Найдем радиус окружности.*

1) Так как треугольники $ATB$ и $CTB$ равны ($AB = BC = 2$ см, $\angle ATB = \angle CTB = 90°$, $TB$ — общая сторона), то $AT = TC$, т. е. треугольник $ATC$ — равнобедренный (рис. 49, *в*).

2) В прямоугольном треугольнике $CTB$ ($TB = 1$ см, $BC = 2$ см, $\angle CTB = 90°$) катет $TC = \sqrt{BC^2 - TB^2} = \sqrt{3}$ см.

3) Пусть точка $E$ — середина отрезка $AC$, точка $O$ — центр окружности, вписанной в треугольник $ATC$, а точка $K$ — точка касания окружности и стороны $TC$. В прямоугольном треугольнике $TEC$ ($\angle TEC = 90°$, так как медиана $TE$, проведенная к основанию, в равнобедренном треугольнике $ATC$ является и высотой, $CE = 1$ см, $TC = \sqrt{3}$ см) катет $TE = \sqrt{TC^2 - CE^2} = \sqrt{2}$ см.

4) Имеем $OE = OK = r$, $OT = TE - OE = \sqrt{2} - r$, где $r$ — радиус вписанной окружности. Треугольники $TEC$ и $TKO$ подобны ($\angle TEC = \angle TKO = 90°$, $\angle ETC = \angle KTO$), следовательно, $OT : TC = OK : EC$ или $(\sqrt{2} - r) : \sqrt{3} = r : 1$. Отсюда находим радиус окружности: $r = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}$.

Заметим, что радиус $r$ можно найти, воспользовавшись формулой $r = \frac{S_{ATC}}{p_{ATC}}$, где $S_{ATC}$ и $p_{ATC}$ — площадь и полупериметр треугольника $ATC$ соответственно.

## Вопросы и задачи к § 4

I

**1.** Какая плоскость называется секущей плоскостью многогранника?

**2.** Какая фигура называется сечением многогранника?

**3.** Поясните, как можно построить отрезок, по которому секущая плоскость пересекает грань многогранника.

**4.** Что необходимо построить для того, чтобы построить прямую, по которой пересекаются две плоскости?



**5.** Объясните, как строится точка пересечения прямой и данной плоскости.

**6.** На рисунке 50, *а* изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $T \in A_1D_1$, $O \in CC_1$, $K \in DD_1$. Перечертите рисунок в тетрадь и постройте: а) точку пересечения прямой $TK$ с плоскостью грани $AA_1B_1B$; б) сечение куба плоскостью, проходящей через точки $T$, $K$ и $O$.

**7.** Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки $B_1$, $T$ и $O$, где точки $T$ и $O$ — середины ребер $AD$ и $DC$ соответственно.

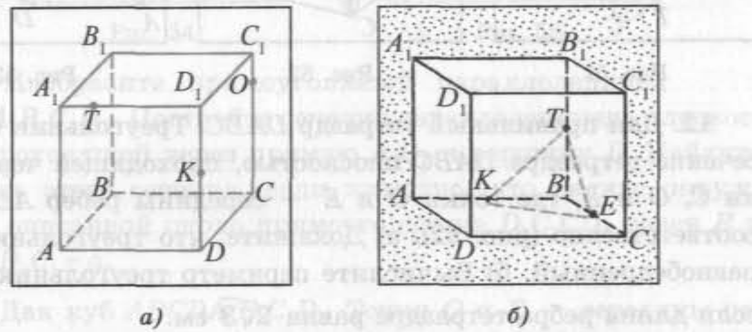



Рис. 50

**8.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Треугольник $KTE$ сечение куба плоскостью, проходящей через точки $K$, $T$ и $E$ — середины ребер $AB$, $BB_1$ и $BC$ соответственно (рис. 50, *б*). а) Верно ли, что треугольник $KTE$ равносторонний? б) Вычислите площадь треугольника $KTE$, если длина ребра куба равна 1 см.

**9.** Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки $A$, $B_1$, $C$, и вычислите площадь поверхности куба, если площадь построенного сечения равна $\sqrt{3}$ см².

**10.** На рисунке 51 изображена пирамида $DABC$, $O \in AD$, $E \in DB$, $T \in AC$. Перечертите рисунок в тетрадь и постройте: а) точку пересечения прямой $OT$ с плоскостью $DCB$; б) точку пересечения прямой $OE$ с плоскостью $ABC$; в) сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки $T$, $E$ и $O$.

**11.** Изобразите треугольную пирамиду $ABCD$. Постройте ее сечение плоскостью, проходящей через точки $K$, $E$ и $P$, где точки $K$ и $E$ — середины ребер $AD$ и $BD$ соответственно, а точка $P$ лежит на продолжении ребра $BC$.

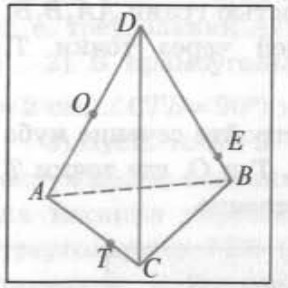



Рис. 51

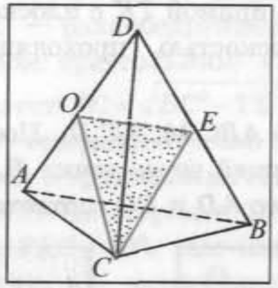



Рис. 52

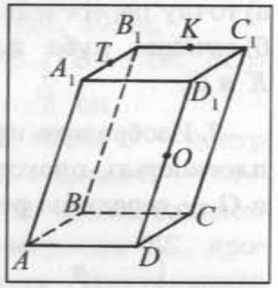



Рис. 53

**12.** Дан правильный тетраэдр $DABC$. Треугольник $COE$ — сечение тетраэдра $DABC$ плоскостью, проходящей через точки $C$, $O$ и $E$, где точки $O$ и $E$ — середины ребер $AD$ и $DB$ соответственно (рис. 52). а) Докажите, что треугольник $COE$ равнобедренный. б) Вычислите периметр треугольника $COE$, если длина ребра тетраэдра равна $2\sqrt{3}$ см.

**13.** Изобразите правильный тетраэдр $ABCD$. Постройте сечение этого тетраэдра плоскостью, проходящей через середины ребер $AD$, $AB$, $AC$, и найдите площадь этого сечения, если длина ребра тетраэдра равна $a$.

**14.** На рисунке 53 изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $T \in A_1B_1$, $K \in B_1C_1$, $O \in DD_1$. Перечертите рисунок в тетрадь и постройте: а) точку пересечения прямой $TK$ с плоскостью грани $AA_1D_1D$; б) сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки $T$, $K$ и $O$.

**15.** Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки $T$, $P$ и $O$ — середины ребер $BB_1$, $AD$ и $DC$ соответственно.

**16.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $AB = BC = 3$ см и $CC_1 = 4$ см. Треугольник $BDC_1$ — сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямую $BD$ и



вершину $C_1$ (рис. 54). а) Докажите, что треугольник $BDC_1$ — равнобедренный. б) Вычислите длину высоты треугольника $BDC_1$, проведенной к стороне $DC_1$.

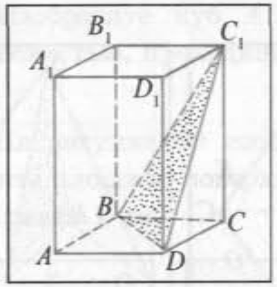



Рис. 54

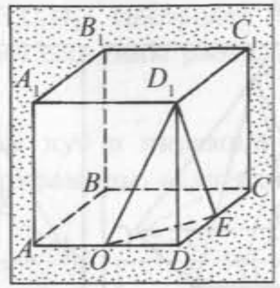



Рис. 55

**17.** Изобразите прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямую $A_1C_1$ и вершину $D$. Найдите площадь этого сечения, если известно, что радиус окружности, описанной около прямоугольника $D_1C_1CD$, равен $R$ и $A_1D_1 = D_1C_1 = a$.

**18.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки $O$ и $E$ — середины ребер $AD$ и $DC$ соответственно. Треугольник $OED_1$ — сечение куба плоскостью, проходящей через точки $O$, $E$ и $D_1$ (рис. 55). а) Является ли треугольник $OED_1$ равнобедренным? б) Найдите длину ребра куба, если периметр треугольника $OED_1$ равен $P$.

**19.** Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через прямую $AC$ и точку $T$, где точка $T$ — середина ребра $BB_1$. Вычислите длину медианы $TO$ треугольника $ATC$, если $AB = 2$ см.

**20.** $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны 2 см. Треугольник $AFC$ — сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую $AC$ и точку $F$ — середину ребра $SB$ (рис. 56). Вычислите длину высоты $FO$ треугольника $AFC$.

**21.** Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$, все ребра которой равны между собой, точка $K$ — середина

**32.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 63). Четырехугольник $AKTC$ — сечение куба плоскостью, проходящей через вершины $A$, $C$ и точку $O$ такую, что точка $B_1$ — середина отрезка $OB$. Докажите, что четырехугольник $AKTC$ — равнобедренная трапеция, и вычислите длину ее средней линии, если длина ребра куба равна $\sqrt{2}$ см.

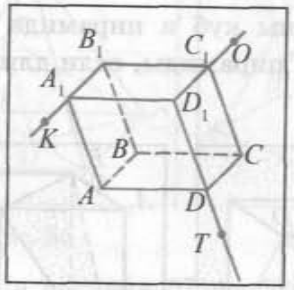


Рис. 62

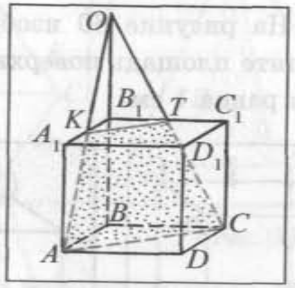


Рис. 63

**33.** Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через прямую $A_1D$ и точку $K$ такую, что точка $C_1$ — середина отрезка $D_1K$. Вычислите периметр построенного сечения, если длина ребра куба равна 1 см.

**34.** Изобразите правильный тетраэдр $ABCD$ и постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через середины ребер $DA$, $DB$ и $DC$. Вычислите площадь грани правильного тетраэдра, если площадь построенного сечения равна 6 см$^2$.

## II

**35.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точки $T$ и $K$ принадлежат ребрам $BB_1$ и $AA_1$ соответственно, а точка $P$ лежит в плоскости грани $ABCD$ (рис. 64). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте: а) точку пересечения прямой $TK$ с плоскостью грани $ABCD$; б) сечение куба плоскостью $TKP$.

**36.** $SABCD$ — четырехугольная пирамида. Точка $T$ — середина ребра $SA$, точка $K$ лежит на ребре $SC$ так, что $CK : CS = 1 : 4$, а точка $F$ лежит на продолжении диагонали $BD$ основания так, что $BD : DF = 2 : 1$. Постройте сечение пирамиды плоскостью $TKF$.



**37.** $ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма. Точки $P$ и $T$ принадлежат ребрам $BB_1$ и $CC_1$ соответственно, а точка $Q$ лежит в плоскости $ABC$ (рис. 65). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте: а) точку пересечения прямой $PT$ с плоскостью $ABC$; б) сечение призмы плоскостью $PTQ$.

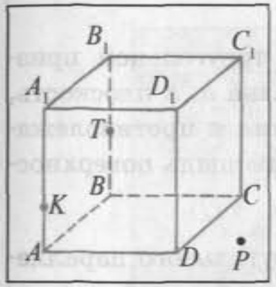


Рис. 64

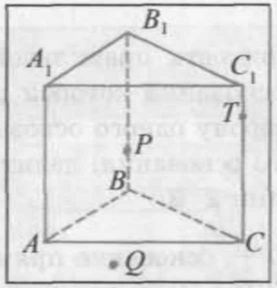


Рис. 65

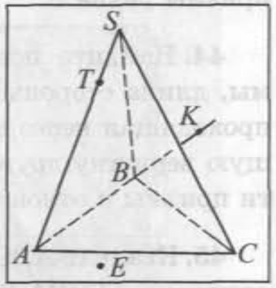


Рис. 66

**38.** $SABC$ — треугольная пирамида. Точки $T$ и $F$ — середины ребер $SA$ и $AC$ соответственно, а точка $K$ — точка пересечения медиан грани $SBC$. Постройте сечение пирамиды плоскостью $TKF$.

**39.** $SABC$ — треугольная пирамида. Точка $T$ лежит на ребре $SA$, точка $K$ — на продолжении ребра $AB$, а точка $E$ лежит в плоскости $ABC$ (рис. 66). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте: а) точку пересечения прямой $TK$ с плоскостью $SBC$; б) сечение пирамиды плоскостью $TKE$.

**40.** $SABCD$ — четырехугольная пирамида. Точка $T$ — середина ребра $SB$, а точки $K$ и $E$ лежат на продолжении ребра $BC$ и $SD$ соответственно так, что $BC : CK = 3 : 1$, $SD : DE = 3 : 1$. Постройте сечение пирамиды плоскостью $TEK$.

**41.** $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, длина стороны основания которой равна 8 см, а бокового ребра — 6 см. Вычислите площадь сечения, проходящего через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания.

**42.** В правильном тетраэдре $DABC$ точка $O$ — середина ребра $BC$. Площадь сечения, проходящего через точки $A$, $D$ и $O$, равна $S$. Найдите площадь поверхности данного тетраэдра.

**43.** $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, все ребра которой равны между собой. Найдите площадь сечения призмы плоскостью $AB_1C_1$, если площадь поверхности призмы равна $S$.

**44.** Найдите поверхность правильной треугольной призмы, длина стороны основания которой равна $a$, а плоскость, проходящая через сторону одного основания и противолежащую вершину другого основания, делит площадь поверхности призмы в отношении $2:3$.

**45.** Квадрат $ABCD$ — основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если длина бокового ребра равна $a$, а площадь сечения, проходящего через концы трех ребер, выходящих из одной вершины, равна $S$.

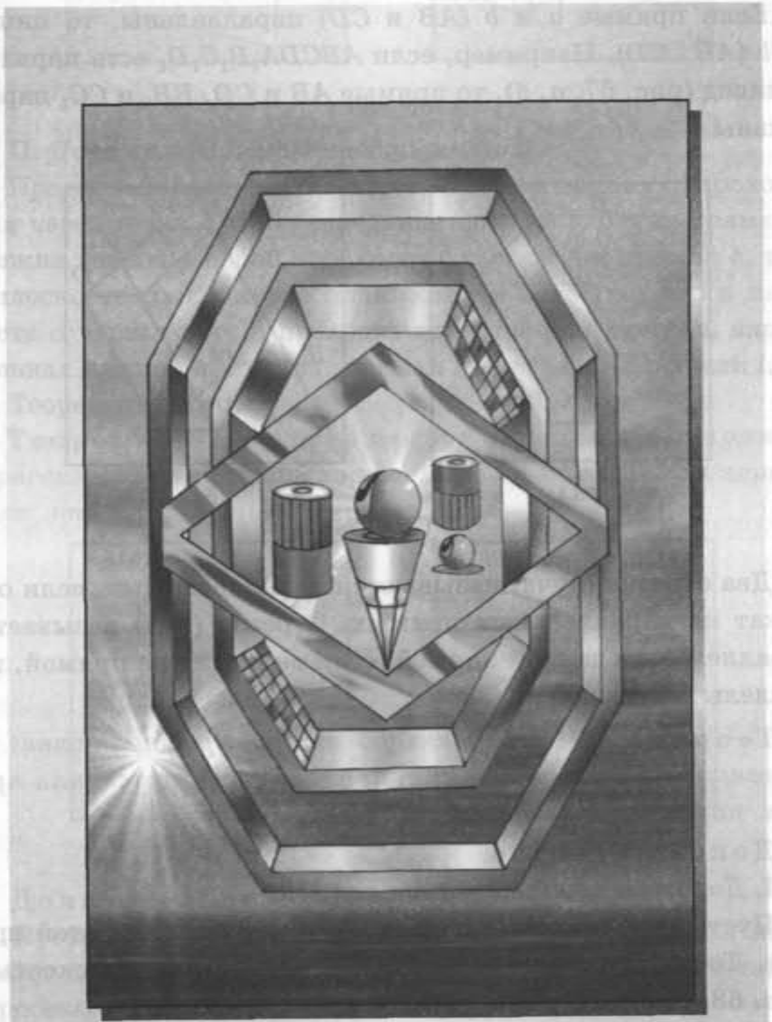
**46.** В правильной четырехугольной пирамиде $TABCD$ площадь сечения пирамиды плоскостью $TAC$ равна $S$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если все ребра пирамиды равны между собой.

**47.** Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, произведение длин диагоналей которого равно 48 см², а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{12}{5}$ см. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда, если длина диагонали боковой грани равна 13 см.

**48.** В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $a$, а боковое ребро $b$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через две вершины основания и середину бокового ребра.

# ГЛАВА 2

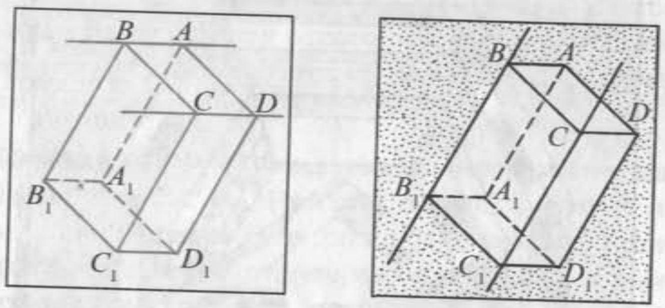
## Параллельность прямых и плоскостей



## § 1. Параллельные прямые в пространстве

**Определение.** *Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.*

Если прямые $a$ и $b$ ($AB$ и $CD$) параллельны, то пишут $a \parallel b$ ($AB \parallel CD$). Например, если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ есть параллелепипед (рис. 67, *а*, *б*), то прямые $AB$ и $CD$, $BB_1$ и $CC_1$ параллельны.




*а)* *б)*

Рис. 67

Два отрезка (луча) называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых. Отрезок (луч) называется параллельным данной прямой, если он лежит на прямой, параллельной данной.

**Теорема 1.** *Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой.*

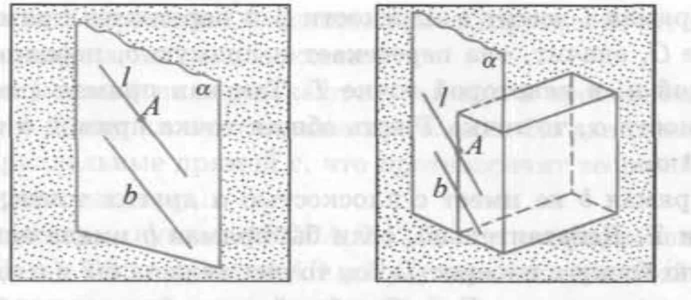
**Доказательство.**

I. *Докажем существование прямой.*

Пусть дана прямая $b$ и точка $A$, не лежащая на этой прямой. Тогда через них проходит единственная плоскость $\alpha$ (рис. 68, *а*, *б*).

В этой плоскости, как известно из планиметрии, существует прямая $l$, проходящая через точку $A$ и параллельная прямой $b$.






*а)* *б)*

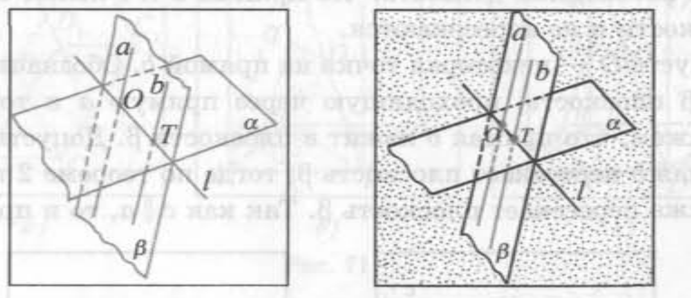
Рис. 68

II. *Докажем единственность прямой.*

Предположим, что существует еще одна прямая $l_1$, проходящая через точку $A$ и параллельная прямой $b$. Тогда прямая $l_1$ должна лежать в одной плоскости с точкой $A$ и прямой $b$, т. е. в плоскости $\alpha$. Из курса планиметрии известно, что в плоскости $\alpha$ через точку $A$ проходит единственная прямая, параллельная прямой $b$. Значит, прямая $l_1$ совпадает с прямой $l$.

Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.*




*а)* *б)*

Рис. 69

**Доказательство.**

Пусть $a$ и $b$ — параллельные прямые, и прямая $a$ пересекает плоскость $\alpha$ в точке $O$. Докажем, что прямая $b$ также пересекает плоскость $\alpha$ (рис. 69, *а*, *б*).

Рассмотрим плоскость $\beta$, в которой лежат параллельные прямые $a$ и $b$. Плоскости $\alpha$ и $\beta$ имеют общую точку $O$, следовательно, они пересекаются по некоторой прямой $l$.

Прямая $l$ лежит в плоскости $\beta$ и пересекает прямую $a$ в точке $O$, значит, она пересекает и прямую $b$, параллельную прямой $a$, в некоторой точке $T$. Так как прямая $l$ лежит в плоскости $\alpha$, то точка $T$ есть общая точка прямой $b$ и плоскости $\alpha$.

Прямая $b$ не имеет с плоскостью $\alpha$ других точек, кроме точки $T$. Действительно, если бы прямая $b$ имела еще одну общую точку с плоскостью $\alpha$, то она лежала бы в плоскости $\alpha$, а следовательно, была бы общей прямой плоскостей $\alpha$ и $\beta$, т. е. совпадала бы с прямой $l$, что противоречит параллельности прямых $a$ и $b$.

Таким образом, прямая $b$ имеет с плоскостью $\alpha$ единственную общую точку $T$, т. е. пересекается с плоскостью $\alpha$ в точке $T$.

Теорема доказана.

**Теорема 3** (*признак параллельности прямых*). *Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.*

**Доказательство.**

Пусть $a \parallel c$, $b \parallel c$ (рис. 70, *а*, *б*). Докажем, что $a \parallel b$. Для этого необходимо доказать, что прямые $a$ и $b$ лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Пусть $O$ — некоторая точка на прямой $b$. Обозначим буквой $\beta$ плоскость, проходящую через прямую $a$ и точку $O$. Докажем, что прямая $b$ лежит в плоскости $\beta$. Допустим, что прямая $b$ пересекает плоскость $\beta$, тогда по теореме 2 прямая $c$ также пересекает плоскость $\beta$. Так как $c \parallel a$, то и прямая $a$

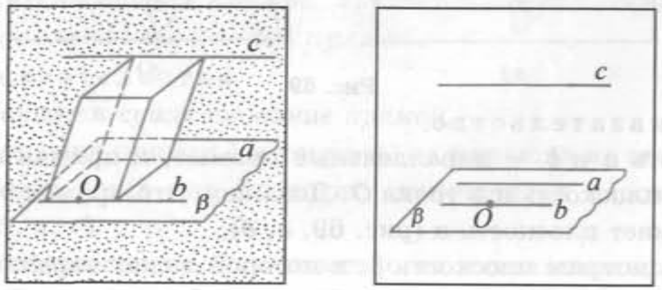



Рис. 70



по теореме 2 пересекает плоскость $\beta$, а это противоречит тому, что прямая $a$ лежит в плоскости $\beta$.

Прямые $a$ и $b$ не пересекаются, так как в противном случае через точку их пересечения проходили бы две прямые $a$ и $b$, параллельные прямой $c$, что противоречит теореме 1.

Теорема доказана.

Например, пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед (рис. 71, *а*). Тогда прямые $AD$ и $B_1C_1$ параллельны. Действительно, так как четырехугольник $AA_1D_1D$ — параллелограмм, то $AD \parallel A_1D_1$. Аналогично $A_1D_1 \parallel B_1C_1$, так как $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм. Тогда по признаку параллельности прямых $AD \parallel B_1C_1$.

Задача. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат со стороной 1 см, а длина бокового ребра параллелепипеда равна 3 см. Точки $P$, $T$, $O$ и $K$ являются серединами отрезков $AB$, $BB_1$, $B_1D$ и $AD$ соответственно. Вычислите периметр четырехугольника $PTOK$ (рис. 71, *б*, *в*).

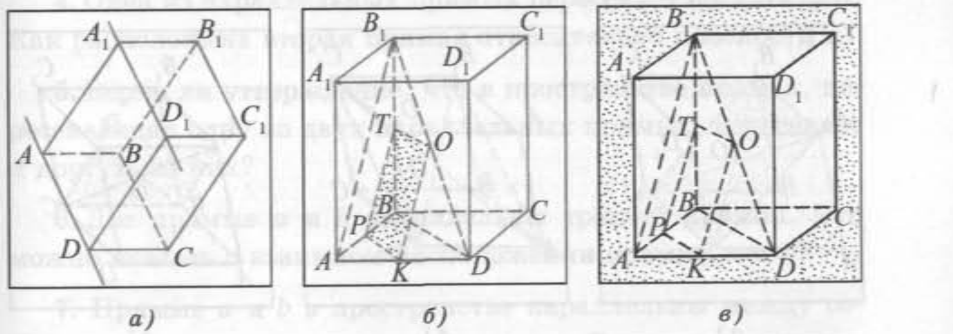



Рис. 71

**Решение.**

1) В треугольнике $B_1BD$ отрезок $TO$ есть средняя линия, следовательно, $TO \parallel BD$, $TO = \frac{1}{2}BD$.

2) В треугольнике $ABD$ отрезок $PK$ — средняя линия, значит, $PK \parallel BD$, $PK = \frac{1}{2}BD$.

3) Из 1) и 2) следует, что $PK \parallel TO$, $PK = TO$, т. е. $PTOK$ — параллелограмм.

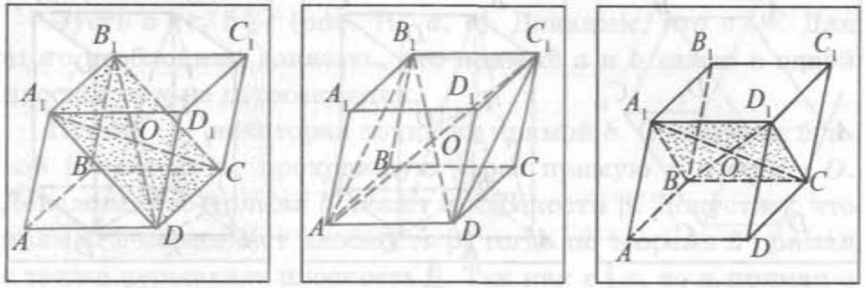
4) Теперь вычислим периметр четырехугольника: $P_{PTOK} = 2PT + 2PK = AB_1 + BD$, $AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{10}$ (см), $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2}$ (см). Таким образом, $P_{PTOK} = \sqrt{10} + \sqrt{2} = \sqrt{2}\,(\sqrt{5}+1)$ (см).

Ответ: $\sqrt{2}\,(\sqrt{5}+1)$ см.

**Теорема 4** *(о точке пересечения диагоналей параллелепипеда). Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.*

Доказательство.

1) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Рассмотрим четырехугольник $A_1B_1CD$, диагонали которого $A_1C$ и $B_1D$ являются диагоналями данного параллелепипеда (рис. 72, *а*). Так как $AA_1B_1B$ — параллелограмм, то $AB = A_1B_1$, $AB \parallel A_1B_1$; так как четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, то $AB = CD$, $AB \parallel CD$. Следовательно, $A_1B_1 = CD$, $A_1B_1 \parallel CD$, т. е. четырехугольник $A_1B_1CD$ — параллелограмм. Поэтому его диагонали $A_1C$ и $B_1D$ пересекаются в некоторой точке $O$ и этой точкой делятся пополам.




*а)* *б)* *в)*

Рис. 72

2) Рассмотрим четырехугольник $B_1C_1DA$. Он также является параллелограммом, так как $B_1C_1 = AD$ и $B_1C_1 \parallel AD$. Следовательно, его диагонали $B_1D$ и $C_1A$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Серединой диагонали $B_1D$ является точка $O$, значит, диагонали $A_1C$, $B_1D$ и $C_1A$ пересекаются в точке $O$ и делятся ею пополам (рис. 72, *б*).

3) Теперь рассмотрим четырехугольник $A_1D_1CB$. Этот четырехугольник является параллелограммом, так как $BC = A_1D_1$, $BC \parallel A_1D_1$. Значит, его диагонали $A_1C$ и $D_1B$, которые являются диагоналями параллелепипеда, пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Серединой диагонали $A_1C$ является точка $O$, следовательно, и диагональ $D_1B$ параллелепипеда проходит через точку $O$ и делится этой точкой пополам (рис. 72, *в*).



## Вопросы и задачи к § 1

### I

**1.** Верно ли утверждение, что прямые в пространстве параллельны, если они не пересекаются?

**2.** Верно ли утверждение, что параллельные прямые в пространстве лежат в одной плоскости?

**3.** Верно ли, что через точку, не лежащую на прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой?

**4.** Одна из параллельных прямых пересекает плоскость $\alpha$. Как расположена вторая прямая относительно плоскости $\alpha$?

**5.** Верно ли утверждение, что в пространстве прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую из них?

**6.** Две прямые $a$ и $b$ параллельны третьей прямой. Что можно сказать о взаимном расположении прямых $a$ и $b$?

**7.** Прямые $a$ и $b$ в пространстве параллельны между собой, а прямая $c$ не пересекает прямую $a$. Верно ли утверждение, что прямые $b$ и $c$ параллельны?

**8.** Каким свойством обладает точка пересечения диагоналей параллелепипеда?

**9.** На рисунке 73 изображена треугольная пирамида $SABC$. Точки $P$ и $K$ — середины ребер $SA$ и $SB$ соответственно. Отрезок $TE$ — средняя линия треугольника $CPK$. а) Поясните, почему прямые $PK$ и $AB$ параллельны. б) Верно ли, что прямые $TE$ и $AB$ параллельны?

**10.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $O$ и $E$ — точки пересечения диагоналей его граней $A_1B_1C_1D_1$ и $AA_1D_1D$ соответственно. Докажите, что прямые $OE$ и $TK$ параллельны, где точки $T$ и $K$ — середины ребер $CC_1$ и $CD$ соответственно.

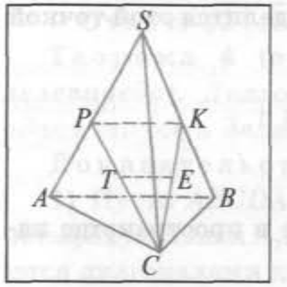



Рис. 73

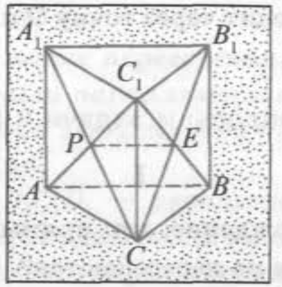



Рис. 74

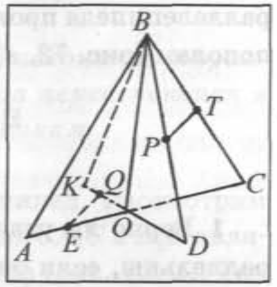



Рис. 75

**11.** $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, длина каждого ребра которой равна 1 см. Диагонали граней $AA_1C_1C$ и $CC_1B_1B$ пересекаются в точках $P$ и $E$ соответственно (рис. 74). а) Верно ли, что $PE \parallel AB$? б) Вычислите периметр четырехугольника $PA_1B_1E$.

**12.** Два треугольника имеют общую среднюю линию. Пересекаются ли прямые, на которых лежат основания треугольников?

**13.** На рисунке 75 изображены два треугольника $ABC$ и $KBD$, имеющие общую медиану $BO$. Точки $T$ и $P$ есть середины отрезков $BC$ и $BD$ соответственно, а точки $Q$ и $E$ — середины отрезков $OK$ и $OA$ соответственно. а) Докажите, что прямая $PT$ параллельна прямой $DC$; б) Верно ли, что прямые $TP$ и $QE$ параллельны?

**14.** Два параллелограмма $ABCD$ и $ABTE$ не лежат в одной плоскости. Докажите, что четырехугольник $CDTE$ — параллелограмм.

**15.** $DABC$ — треугольная пирамида (рис. 76). Точки $T$, $P$, $Q$ и $E$ — середины ребер $AD$, $BD$, $CB$ и $CA$ соответственно. а) Докажите, что четырехугольник $TPQE$ — параллелограмм. б) Вычислите периметр четырехугольника $TPQE$, если $CD = 6$ см, $AB = 7$ см.



**16.** $ABCD$ — трапеция ($BC \parallel DA$). Вершины $A$ и $B$ трапеции лежат в плоскости $\alpha$, а две другие вершины не принадлежат плоскости $\alpha$. Вычислите расстояние от точки $A$ до точки пересечения прямой $CD$ с плоскостью $\alpha$, если $AD = 16$ см, $AB = 9$ см, $BC = 12$ см.

**17.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Точка $O$ лежит на продолжении ребра $DC$ (рис. 77). Вычислите расстояние от точки $D$ до точки пересечения прямой $C_1O$ с плоскостью $A_1AD$, если $CC_1 = 8$ см, $DC = 4$ см, $OC = 6$ см.

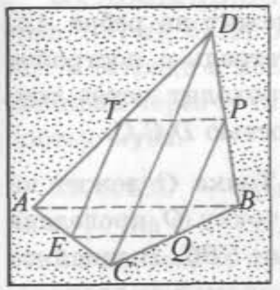



Рис. 76

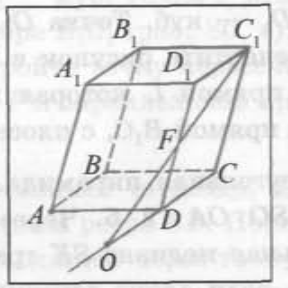



Рис. 77

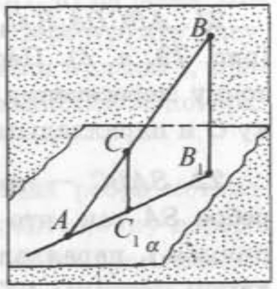



Рис. 78

**18.** Плоскость $\alpha$ и отрезок $AB$ имеют одну общую точку $A$. Через точку $B$ и середину $C$ отрезка $AB$ проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость $\alpha$ в точках $B_1$ и $C_1$ соответственно. Вычислите длину отрезка $BB_1$, если $CC_1 = 10$ см.

**19.** Через конец $A$ отрезка $AB$ проходит плоскость $\alpha$. Через точку $B$ и точку $C$ этого отрезка проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость $\alpha$ в точках $B_1$ и $C_1$ соответственно. Вычислите длину отрезка $CC_1$, если $BB_1 = 8$ см и $AC : CB = 3 : 5$ (рис. 78).

**20.** Отрезок $AB$ не пересекает плоскость $\alpha$. Точка $C$ принадлежит отрезку $AB$. Через точки $A$, $B$, $C$ проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость $\alpha$ в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$ соответственно. Докажите, что точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ лежат на одной прямой, и вычислите длину отрезка $CC_1$, если $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 5$ см, $AC : BC = 1 : 3$.

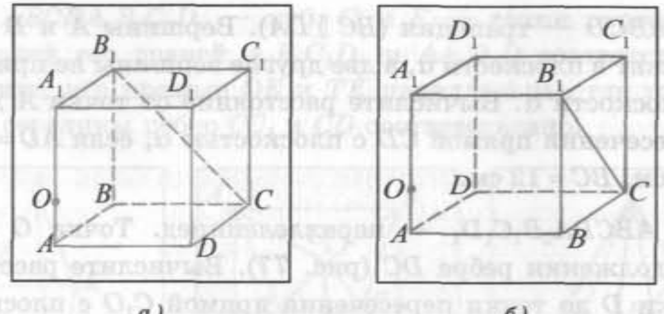



Рис. 79

**21.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точка $O$ лежит на ребре $AA_1$ (рис. 79, *а*, *б*). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте точку пересечения прямой $l$, которая проходит через точку $O$ и параллельна прямой $B_1C$, с плоскостью $D_1C_1C$.

**22.** $SABC$ — треугольная пирамида. Точка $O$ лежит на ребре $SA$ так, что $SO : OA = 2 : 5$. Через точку $O$ проведена прямая $l$, параллельная медиане $SK$ грани $SBC$. Вычислите длину медианы $SK$, если длина отрезка прямой $l$, расположенного внутри пирамиды, равна 7 см.

**23.** Плоскость $\alpha$ проходит через вершины $B$ и $C$ треугольника $ABC$, а вершина $A$ не лежит в плоскости $\alpha$. Прямая $a$ параллельна прямой $AC$ и пересекает сторону $AB$ в точке $F$ так, что $AF : FB = 2 : 3$. а) Докажите, что прямая $a$ пересекает плоскость $\alpha$. б) Вычислите расстояние от точки $O$ до точки пересечения прямой $a$ с плоскостью $\alpha$, если $AC = 3$ см.

**24.** В правильном тетраэдре $SABC$ точка $P$ лежит на ребре $AB$ так, что $AP : PB = 1 : 3$. Прямая $a$ проходит через точку $P$, параллельна медиане $AE$ боковой грани $SAC$ и пересекает поверхность тетраэдра в точке $T$. Вычислите длину ребра тетраэдра, если $PT = 4$ см.

**25.** $SABC$ — правильный тетраэдр. Через точку пересечения медиан грани $ABC$ проведена прямая $l$, параллельная прямой $AS$. Найдите площадь треугольника $BKS$ (точка $K$ — середина ребра $AS$), если длина отрезка прямой $l$, расположенного внутри тетраэдра, равна $a$.



**26.** Параллелограмм $ABCD$ и треугольник $BTC$ не лежат в одной плоскости. Прямая $a$ проходит через точку $O$, лежащую на прямой $TC$, и параллельна прямой $BC$. Докажите, что прямые $AD$ и $a$ параллельны.

**27.** $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. Точка $O$ лежит на прямой $SD$. Прямая $l$ проходит через точку $O$ и параллельна прямой $DC$. Докажите, что прямые $AB$ и $a$ параллельны.

## II

**28.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точка $P$ лежит: а) на ребре $BB_1$ (рис. 80, *а*); б) на ребре $B_1C_1$ (рис. 80, *б*). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте точку пересечения прямой $l$, проходящей через точку $P$ и параллельной прямой $B_1D$, с поверхностью куба.

**29.** $SABC$ — правильный тетраэдр, длина ребра которого $a$. Точка $O$ — середина ребра $SB$. Постройте точку пересечения прямой $l$, проходящей через точку $O$ и параллельной медиане $BT$ грани $ABC$. Найдите длину отрезка этой прямой, расположенного внутри тетраэдра.

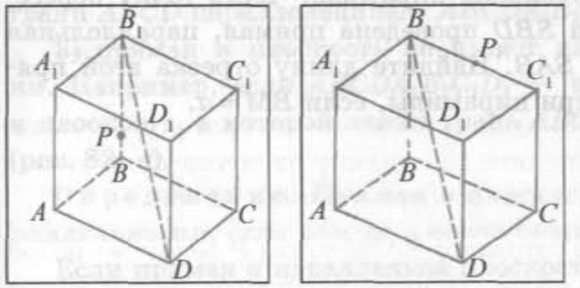



Рис. 80

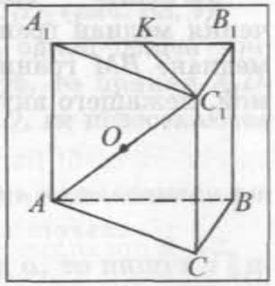



Рис. 81

**30.** $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, все ребра которой равны между собой. Точка $O$ — середина диагонали $AC_1$ грани $AA_1C_1C$. Постройте точку пересечения прямой $l$, проходящей через точку $O$ и параллельной медиане $C_1K$ грани $A_1B_1C_1$, с гранью $AA_1B_1B$. Вычислите площадь боковой поверхности призмы, если длина отрезка прямой $l$, расположенного внутри призмы, равна 1 см (рис. 81).

**31.** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны между собой. Точка $O$ — точка пересечения медиан грани $ABC$. Найдите длину расположенного внутри призмы отрезка прямой, проходящей через середину отрезка $A_1O$ и параллельной прямой $CO$, если площадь ее боковой поверхности равна $S$.

**32.** $TABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой в два раза больше стороны основания, а площадь боковой поверхности равна $S$. Найдите длину расположенного внутри пирамиды отрезка прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей основания и параллельной медиане $TF$ грани $TDC$.

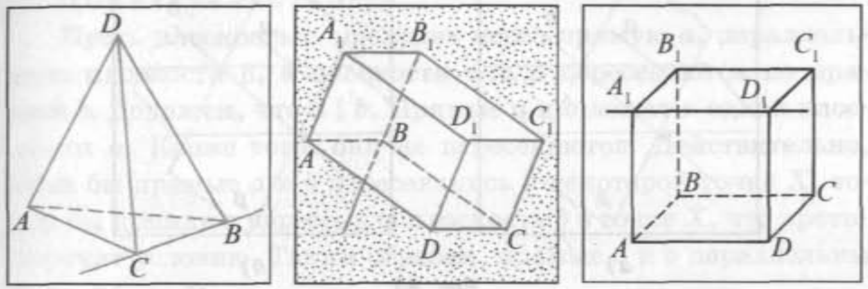
**33.** В правильной четырехугольной пирамиде $TABCD$ все ребра равны между собой. Точка $E$ — середина ребра $TA$. Через точку $E$ проведена прямая $l$, параллельная прямой $KP$, где $K$ и $P$ — середины ребер $TD$ и $TC$ соответственно. Постройте точку $F$ — точку пересечения прямой $l$ с плоскостью $TBC$. Найдите площадь основания пирамиды, если площадь четырехугольника $EFCD$ равна $S$.

**34.** $SABD$ — треугольная пирамида. Через точку пересечения медиан грани $SBD$ проведена прямая, параллельная медиане $BM$ грани $SAB$. Найдите длину отрезка этой прямой, лежащего внутри пирамиды, если $BM = a$.

## § 2. Параллельность прямой и плоскости

**1. Параллельность прямой и плоскости.** Возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости:

1) прямая лежит в плоскости (каждая точка прямой лежит в плоскости). Например, если $DABC$ — треугольная пирамида, то прямая $CB$ лежит в плоскости $ABC$ (рис. 82, *а*);




а) б) в)

Рис. 82

2) прямая и плоскость пересекаются (имеют единственную общую точку). Прямая $B_1B$ пересекается с плоскостью грани $ABCD$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 82, *б*);

3) прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки. Например, если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, то прямая $A_1D_1$ и плоскость, в которой лежит грань $ABCD$, не пересекаются (рис. 82, *в*).

Определение. *Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.*

Если прямая $a$ параллельна плоскости $\alpha$, то пишут $a \parallel \alpha$. Читают: «Прямая $a$ параллельна плоскости $\alpha$».

Отрезок (луч) называется параллельным плоскости, если он лежит на прямой, параллельной данной плоскости.

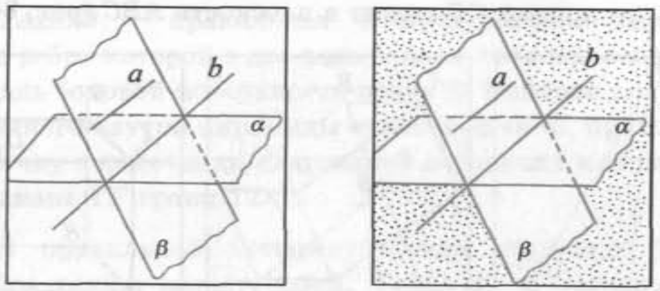
Наглядное представление о прямой, параллельной плоскости, дает линия пересечения стены и потолка в комнате. Эта линия параллельна плоскости пола.

**2. Признак параллельности прямой и плоскости.**

Теорема 1 (*признак параллельности прямой и плоскости*). *Если прямая, не лежащая в данной плоскости,* *параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.*

Доказательство.

Пусть прямая $a$ не лежит в плоскости $\alpha$, а прямая $b$ лежит в этой плоскости и $a \parallel b$. Докажем, что прямая $a$ параллельна плоскости $\alpha$ (рис. 83, *а*, *б*).




а) б)

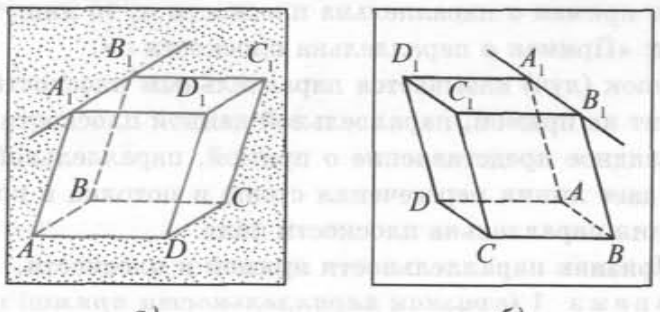
Рис. 83

Предположим, что прямая $a$ пересекает плоскость в некоторой точке $X$. Точка $X$ лежит в плоскости $\alpha$ и в плоскости $\beta$, проходящей через параллельные прямые $a$ и $b$. Следовательно, она лежит на прямой $b$, по которой пересекаются плоскости $\alpha$ и $\beta$, что противоречит условию теоремы ($a \parallel b$).

Таким образом, предположение неверно, и прямая $a$ не пересекает плоскость $\alpha$. По условию она не лежит в плоскости $\alpha$, значит, $a \parallel \alpha$.

Теорема доказана.

Например, на рисунке 84, *а*, *б* ($ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед) прямая $A_1B_1$ параллельна плоскости $\alpha$, в которой




а) Рис. 84 б)

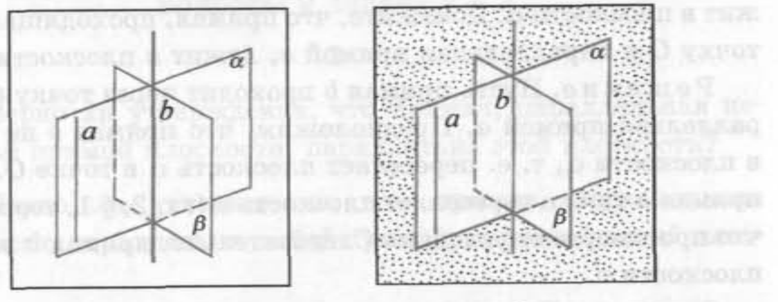


лежит грань $ABCD$. Действительно, прямая $A_1B_1$ параллельна прямой $AB$, лежащей в плоскости $\alpha$. Следовательно, по признаку параллельности прямой и плоскости $A_1B_1 \parallel \alpha$.

Теорема 2. *Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.*

Доказательство.

Пусть плоскость $\alpha$ проходит через прямую $a$, параллельную плоскости $\beta$, а плоскости $\alpha$ и $\beta$ пересекаются по прямой $b$. Докажем, что $a \parallel b$. Прямые $a$ и $b$ лежат в одной плоскости $\alpha$. Кроме того, они не пересекаются. Действительно, если бы прямые $a$ и $b$ пересекались в некоторой точке $X$, тогда бы прямая $a$ пересекала плоскость $\beta$ в точке $X$, что противоречит условию. Таким образом, прямые $a$ и $b$ параллельны (рис. 85, *а*, *б*).




а) б)

Рис. 85

Проиллюстрируем возможность применения теоремы при решении задач.

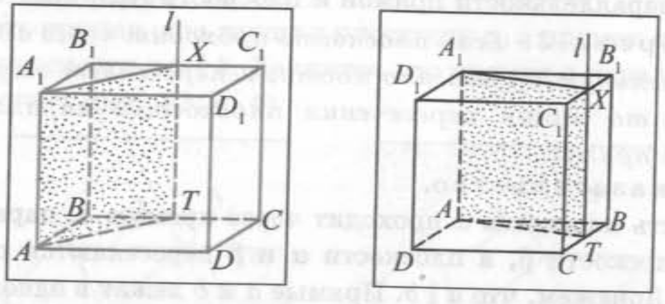
Задача 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью $\alpha$, проходящей через прямую $AA_1$ и точку $T$, которая принадлежит ребру $BC$.

Решение.

1) Плоскость $\alpha$ пересекает грань $ABCD$ по отрезку $AT$ (рис. 86, *а*, *б*).

2) Прямая $AA_1$ параллельна прямой $BB_1$, лежащей в плоскости грани $BCC_1B_1$, следовательно, плоскость $\alpha$ пересекает

плоскость грани $BCC_1B_1$ по прямой $l$, параллельной прямой $BB_1$. Отмечаем точку $X = l \cap B_1C_1$.




а) б)

Рис. 86

3) Плоскость $\alpha$ пересекает грани $BCC_1B_1$ и $C_1B_1A_1D_1$ по отрезкам $XT$ и $XA_1$ соответственно. Четырехугольник $TXA_1A$ — искомое сечение.

Задача 2. Прямая $a$ параллельна плоскости $\alpha$. Точка $O$ лежит в плоскости $\alpha$. Докажите, что прямая, проходящая через точку $O$ и параллельная прямой $a$, лежит в плоскости $\alpha$.

Решение. Пусть прямая $b$ проходит через точку $O$ и параллельна прямой $a$. Предположим, что прямая $b$ не лежит в плоскости $\alpha$, т. е. пересекает плоскость $\alpha$ в точке $O$. Тогда прямая $a$ также пересекает плоскость $\alpha$ (гл. 2, § 1, теорема 4), что противоречит условию. Следовательно, прямая $b$ лежит в плоскости $\alpha$.

Задача 3. Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью $\alpha$, проходящей через прямую $B_1C$ и точку $O$, лежащую на ребре $AA_1$.

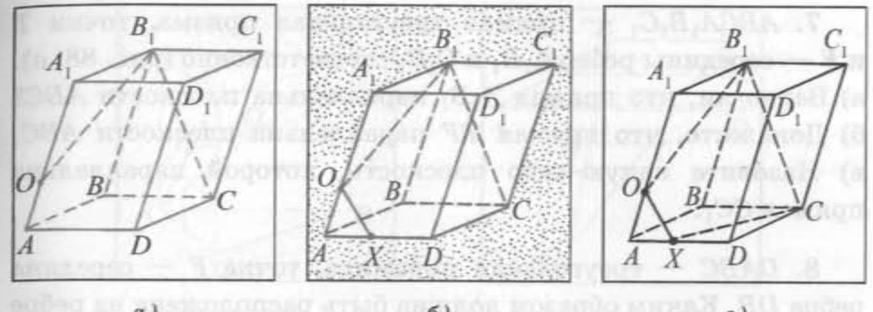
Решение.

1) Плоскость $\alpha$ пересекает грани $AA_1B_1B$ и $BB_1C_1C$ по отрезкам $OB_1$ и $B_1C$ соответственно (рис. 87, а).

2) Четырехугольник $A_1B_1CD$ является параллелограммом (так как $A_1B_1 \parallel DC$, $A_1B_1 = DC$), следовательно, $B_1C \parallel A_1D$. По признаку параллельности прямой и плоскости прямая $B_1C$ параллельна плоскости, в которой лежит грань $AA_1D_1D$.

3) Секущая плоскость $\alpha$ пересекает плоскость грани $AA_1D_1D$ по прямой $l$, проходящей через точку $O$ и параллельной прямой $B_1C$. Отметим точку $X = l \cap AD$ ($A \in l$, $l \parallel A_1D$) (рис. 87, б).






а) б) в)

Рис. 87

4) Плоскость $\alpha$ пересекает грани $AA_1D_1D$ и $ABCD$ по отрезкам $XO$ и $XC$ (рис. 87, в). Четырехугольник $OB_1CX$ — искомое сечение.

## Вопросы и задачи к § 2

### I

**1.** Верно ли утверждение, что прямая, параллельная некоторой прямой плоскости, параллельна этой плоскости?

**2.** Верно ли утверждение, что прямая, параллельная плоскости, параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости?

**3.** Верно ли утверждение, что две прямые, каждая из которых параллельна некоторой плоскости, параллельны между собой?

**4.** Прямая $a$ параллельна плоскости $\beta$. Верно ли, что прямая $a$ не пересекает любую прямую плоскости $\beta$?

**5.** Прямая $l$ параллельна плоскости $\alpha$. Верно ли утверждение, что в плоскости $\alpha$ существует прямая, параллельная прямой $l$?

**6.** Можно ли две пересекающиеся плоскости пересечь третьей плоскостью по двум параллельным прямым?

**7.** $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, точки $T$ и $F$ — середины ребер $A_1B_1$ и $C_1B_1$ соответственно (рис. 88, *а*).
а) Верно ли, что прямая $A_1B_1$ параллельна плоскости $ABC$?
б) Докажите, что прямая $TF$ параллельна плоскости $ABC$.
в) Назовите какую-либо плоскость, которой параллельна прямая $CC_1$.

**8.** $DABC$ — треугольная пирамида, точка $F$ — середина ребра $DB$. Каким образом должна быть расположена на ребре $CB$ точка $T$, чтобы прямая $FT$ была параллельна плоскости $DCA$?

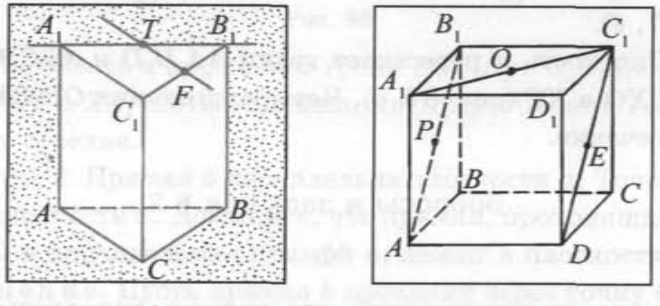



Рис. 88

**9.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точки $P$, $O$ и $E$ — середины отрезков $AB_1$, $A_1C_1$ и $C_1D$ соответственно (рис. 88, *б*). а) Верно ли, что прямая $PO$ параллельна плоскости, в которой лежит грань $AA_1D_1D$? б) Докажите, что прямая $OE$ параллельна плоскости $B_1BC$.

**10.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки $O$ и $E$ — середины отрезков $AB_1$ и $AC$ соответственно. а) Докажите, что отрезок $OE$ параллелен плоскости, в которой лежит грань $BCC_1B_1$. б) Вычислите длину отрезка $OE$, если $AD = 3$ см, $DD_1 = 4$ см.

**11.** $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, точки $O$ и $F$ — середины отрезков $AB_1$ и $AC_1$ соответственно (рис. 89, *а*).
а) Верно ли, что прямая $FO$ параллельна плоскости $A_1B_1C_1$?
б) Докажите, что прямая $FO$ параллельна плоскости $ABC$.



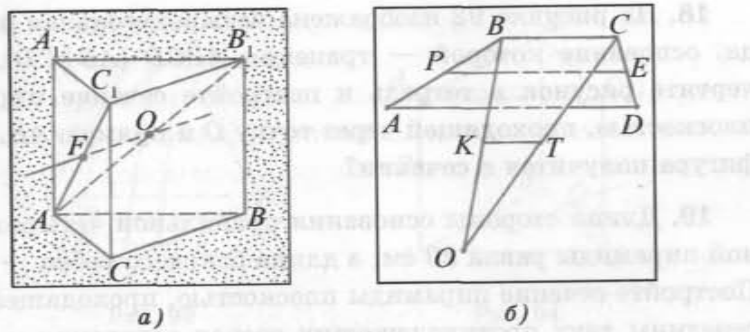



Рис. 89

**12.** $ABCD$ — трапеция. Плоскость $\alpha$ проходит через вершины $A$, $D$ и не проходит через вершину $C$. Точка $O$ лежит в плоскости $\alpha$ (рис. 89, *б*). а) Докажите, что средняя линия $PE$ трапеции параллельна плоскости $\alpha$. б) Верно ли, что средняя линия $KT$ треугольника $BOC$ параллельна плоскости $\alpha$?

**13.** Точка $O$ не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямая $CD$ параллельна плоскости $AOB$.

**14.** Четырехугольник $B_1COX$ — сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью $\alpha$, проходящей через прямую $B_1C$ и точку $O \in AD$ (рис. 90). а) Верно ли, что прямая $B_1C$ параллельна плоскости $XOT$? б) Докажите, что средняя линия $PE$ треугольника $XOT$ параллельна плоскости $\alpha$.

**15.** $SABC$ — правильная треугольная пирамида, длина бокового ребра которой равна 4 см, а основание есть треугольник со стороной 2 см. Вычислите периметр сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра $BC$ и среднюю линию треугольника $SAB$, которая параллельна прямой $AB$.

**16.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Вычислите площадь полной поверхности куба, если периметр треугольника $TOE$ равен $2+\sqrt{2}$ см, где точки $T$, $O$ и $E$ — середины отрезков $AA_1$, $A_1B$ и $A_1D$ соответственно (рис. 91).

**17.** Точка $O$ не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$, а точка $E$ — середина отрезка $BO$. Докажите, что плоскость $AED$ пересекает прямую $OC$.

**18.** На рисунке 92 изображена четырехугольная пирамида, основание которой — трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку $O$ и прямую $AB$. Какая фигура получится в сечении?

**19.** Длина стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равна 20 см, а длина бокового ребра — 26 см. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середины двух противолежащих сторон основания и параллельной какому-либо боковому ребру. Вычислите площадь сечения.

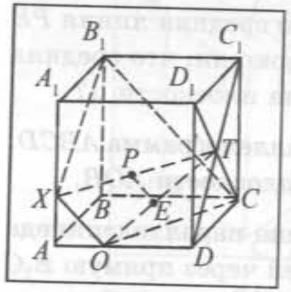


Рис. 90

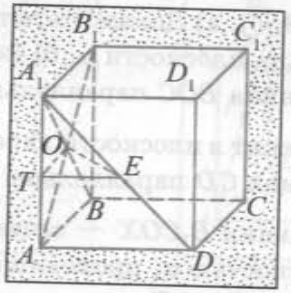


Рис. 91

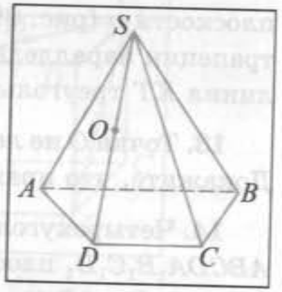


Рис. 92

**20.** На рисунке 93 изображена правильная треугольная пирамида $SABC$. Четырехугольник $DOKT$ — сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середины ребер $AS$, $AC$ и параллельной прямой, на которой лежит медиана $AF$ грани $ABC$. Вычислите длины отрезков $OD$ и $KT$, если $SB = 12$ см.

**21.** $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, длина каждого ребра которой равна $a$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину $S$, середину ребра $CD$ и параллельной диагонали $AC$ основания. Найдите площадь этого сечения.

**22.** $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, каждое ребро которой равно $a$. Точки $P$ и $Q$ — середины ребер $AA_1$ и $BC$ соответственно (рис. 94). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через



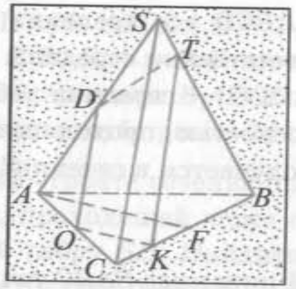


Рис. 93

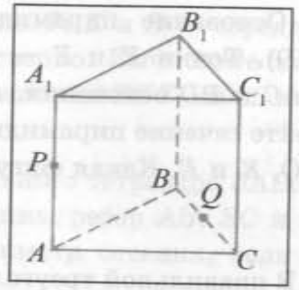


Рис. 94

точки $P$, $Q$ и параллельной прямой $AC$. Найдите периметр этого сечения.

**23.** $SABCD$ — четырехугольная пирамида, основанием которой служит трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Точка $O$ — середина ребра $SA$. Вычислите длину отрезка, по которому плоскость $OBC$ пересекает грань $SAD$, если $BC = 6$ см, а длина средней линии трапеции равна 8 см.

**24.** $DABC$ — правильный тетраэдр. Точки $T$, $K$ и $E$ — середины ребер $DB$, $DC$ и $AC$ соответственно. Вычислите периметр сечения тетраэдра плоскостью $TKE$, если площадь грани тетраэдра равна $16\sqrt{3}$ см$^2$.

**25.** В треугольной пирамиде $ABCD$ точки $O$, $K$ и $T$ — середины ребер $DB$, $DC$ и $AC$ соответственно. Постройте точку $P$, в которой плоскость $OKT$ пересекает ребро $AB$. Докажите, что отрезки $KP$ и $OT$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

**26.** $SABCD$ — четырехугольная пирамида, основание которой — параллелограмм. Точки $T$, $K$ и $E$ — середины ребер $AB$, $AD$ и $SC$ соответственно. Постройте отрезок, по которому плоскость $TKE$ пересекает диагональное сечение $SBD$ пирамиды.

**27.** Основание четырехугольной пирамиды $SABCD$ — трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Точка $E$ — середина ребра $SD$. Постройте точку $T$, в которой плоскость $BCE$ пересекает прямую $SA$. Докажите, что отрезки $TC$ и $BE$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, если средняя линия трапеции $ABCD$ равна $\frac{3}{2}BC$.

**28.** Основание пирамиды $SABCD$ — трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Точки $K$ и $E$ — соответственно середины диагоналей $AC$ и $BD$ основания, а точка $O$ — середина ребра $SB$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки $O$, $K$ и $E$. Какая фигура получается в сечении?

## II

**29.** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка $O$ — центр основания $ABC$, а точка $D$ делит ребро $SC$ на отрезки $SD = \frac{5}{3}$ см и $DC = \frac{10}{3}$ см. Докажите, что прямая $OD$ параллельна плоскости $ASB$, и вычислите длину отрезка $OD$, если $AB = 6$ см.

**30.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точка $F$ — середина ребра $AD$, а точка $K$ лежит на диагонали куба $B_1D$ так, что $B_1K : B_1D = 1 : 3$. Докажите, что прямая $OK$ параллельна плоскости грани $AA_1B_1B$, где точка $O$ — точка пересечения отрезков $AC$ и $BF$ (рис. 95).

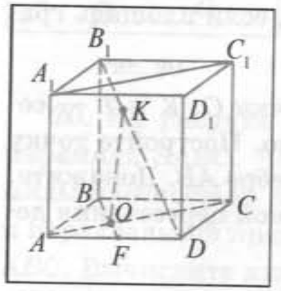



Рис. 95

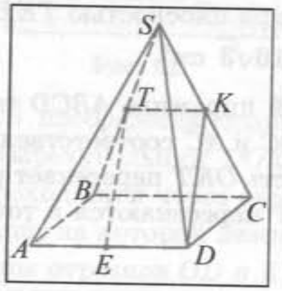



Рис. 96

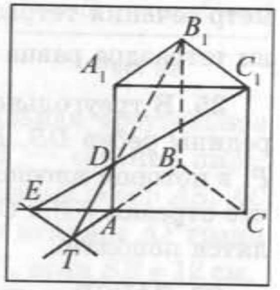



Рис. 97

**31.** Через вершину прямого угла $C$ прямоугольного треугольника $ABC$ проведена плоскость $\alpha$ параллельно гипотенузе $AB$. Биссектриса угла $A$ пересекает плоскость $\alpha$ в точке $O$. Вычислите длину отрезка $CO$, если $AB = 5$ см, $BC = 4$ см.

**32.** $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, точки $E$, $T$ и $K$ — середины ребер $AD$, $SB$ и $SC$ соответственно (рис. 96). Верно ли, что отрезки $ET$ и $DK$ равны и параллельны? Дайте обоснование ответа.



**33.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки $T$, $K$ и $E$ — середины отрезков $B_1B$, $B_1A$ и $B_1D$ соответственно. Вычислите площадь сечения пирамиды $B_1ABCD$ плоскостью $TKE$, если площадь поверхности куба равна 24 см$^2$.

**34.** Постройте сечение правильного тетраэдра $SABC$ плоскостью, проходящей через середины ребер $AB$, $SC$ и параллельной ребру $SB$. Найдите периметр сечения, если длина ребра тетраэдра равна $a$.

**35.** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через вершины $B_1$, $C_1$ и точку $D$ на ребре $AA_1$ ($AD : DA_1 = 2 : 3$) проведены прямые, пересекающие плоскость основания в точках $T$ и $E$ (рис. 97). Вычислите длину отрезка $TE$, если $AB = 9$ см.

**36.** В правильном тетраэдре $SABC$ точки $T$ и $K$ — середины ребер $AB$ и $SC$ соответственно. Вычислите длину отрезка, по которому пересекаются сечения тетраэдра плоскостями, проходящими через прямые $ST$ и $BK$ и параллельными прямой $AC$, если $AB = 12$ см.

**37.** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точки $E$ и $D$ — середины ребер $SA$ и $SB$ соответственно. Через середину $O$ отрезка $CE$ проведена прямая, параллельная прямой $AD$ и пересекающая поверхность пирамиды в точке $T$. Постройте точку $T$ и вычислите длину отрезка $OT$, если $CE = 8$ см.

## § 3. Скрещивающиеся прямые

**1. Скрещивающиеся прямые.** Если две различные прямые лежат в одной плоскости, то они либо пересекаются, либо параллельны. В пространстве возможен и третий случай, когда не существует плоскость, в которой лежат две прямые.

Например, если $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма (рис. 98, *а*, *б*), то прямые $AA_1$ и $CB$ не параллельны и не пересекаются.

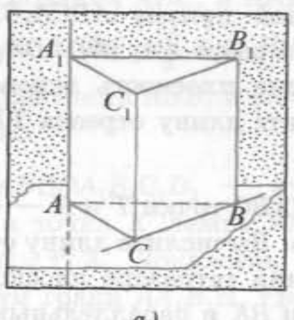



Рис. 98

**О п р е д е л е н и е.** *Две прямые называются скрещивающимися, если не существует плоскость, в которой они обе лежат.*

Возможны три случая взаимного расположения двух прямых в пространстве:

1) *прямые пересекаются* (имеют одну общую точку) (рис. 99, *а*);

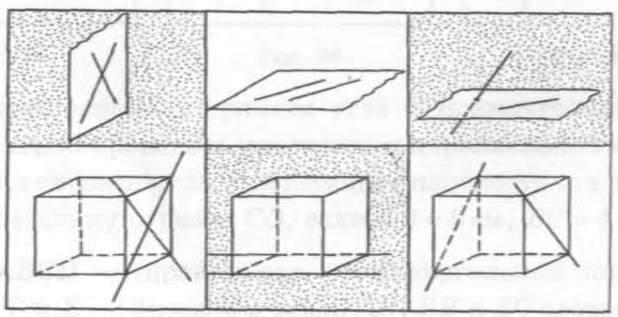



Рис. 99



2) *прямые параллельны* (лежат в одной плоскости и не пересекаются) (рис. 99, *б*);

3) *прямые скрещиваются* (не существует плоскости, в которой они обе лежат) (рис. 99, *в*).

**2. Признак скрещивающихся прямых.** Докажем теорему, которая позволяет выяснить, являются ли две прямые скрещивающимися.

**Т е о р е м а 1** (*признак скрещивающихся прямых*). *Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.*

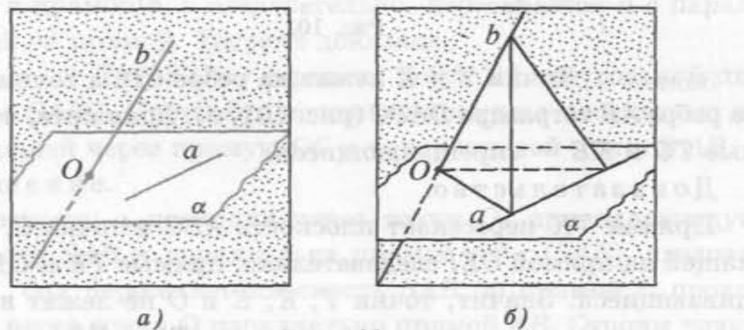


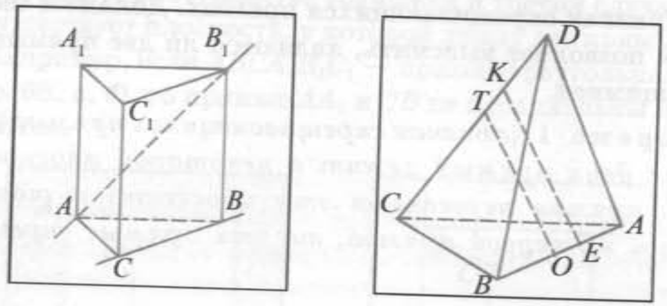

Рис. 100

**Д о к а з а т е л ь с т в о.**

Пусть прямая $a$ лежит в плоскости $\alpha$, а прямая $b$ пересекает эту плоскость в точке $O$, не лежащей на прямой $a$ (рис. 100, *а*, *б*). Докажем, что прямые $a$ и $b$ скрещивающиеся, т. е. не существует плоскость, в которой они обе лежат. Предположим, что прямые $a$ и $b$ лежат в некоторой плоскости $\beta$. Тогда плоскость $\beta$ проходит через прямую $a$ и точку $O$, а следовательно, совпадает с плоскостью $\alpha$ (так как через прямую и не лежащую на ней точку проходит единственная плоскость). Получили, что прямая $b$ лежит в плоскости $\alpha$, а это противоречит условию теоремы. Таким образом, наше предположение неверно, а значит, прямые $a$ и $b$ — скрещивающиеся.

Теорема доказана.

Рассмотрим пример. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма. Тогда прямые $AB_1$ и $BC$ — скрещивающиеся, так как прямая $AB_1$ пересекает плоскость $ABC$ в точке $A$, не лежащей на прямой $BC$ (рис. 101, *а*).




*а)* *б)*

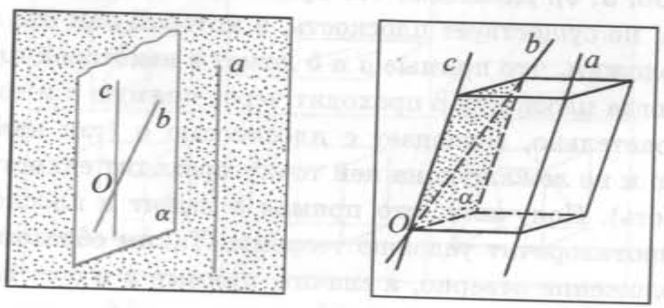
Рис. 101

Задача 1. Точки $T$ и $K$ лежат на ребре $CD$, а точки $O$ и $E$ на ребре $AB$ тетраэдра $DABC$ (рис. 101, *б*). Докажите, что прямые $TO$ и $KE$ — скрещивающиеся.

Доказательство.

Прямая $TK$ пересекает плоскость $ABC$ в точке $C$, не лежащей на прямой $OE$, следовательно, прямые $TK$ и $OE$ скрещивающиеся. Значит, точки $T$, $K$, $E$ и $O$ не лежат в одной плоскости. Отсюда следует, что прямые $TO$ и $KE$ не лежат в одной плоскости, т. е. являются скрещивающимися.

**Теорема 2.** *Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная второй прямой, и притом только одна.*




*а)* *б)*

Рис. 102



Доказательство.

1. *Доказательство существования плоскости.*

Пусть $a$ и $b$ — скрещивающиеся прямые (рис. 102, *а*, *б*). Докажем, что через прямую $b$ проходит плоскость, параллельная прямой $a$. Через какую-либо точку $O$ прямой $b$ проведем прямую $c$, параллельную прямой $a$. Пусть $\alpha$ — плоскость, проходящая через прямые $b$ и $c$. Так как прямая $a$ не лежит в плоскости $\alpha$ и параллельна прямой $c$, лежащей в этой плоскости, то прямая $a$ параллельна плоскости $\alpha$.

2. *Доказательство единственности.*

Плоскость $\alpha$ — единственная плоскость, проходящая через прямую $b$ и параллельная прямой $a$. Действительно, любая другая плоскость, проходящая через прямую $b$, пересекается с прямой $c$, а следовательно, пересекается и с параллельной ей прямой. Теорема доказана.

Задача 2. Точка $O$ — середина ребра $SA$ треугольной пирамиды $SABC$. Постройте сечение пирамиды плоскостью $\alpha$, проходящей через прямую $OC$ и параллельной прямой $AB$.

Решение.

Плоскость $\alpha$ проходит через точку $O$, принадлежащую плоскости $SAB$ и параллельна прямой $AB \subset (SAB)$, следовательно, она пересекает плоскость $SAB$ по прямой $l$, проходящей через точку $O$ параллельно прямой $AB$. Строим точку $F = l \cap SB$, где $l \parallel AB$ и $O \in l$. Плоскость $\alpha$ пересекает грань $SAB$ по отрезку $OF$, а грани $SAC$ и $SBC$ — по отрезкам $OC$ и $CF$ соответственно. Треугольник $COF$ — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью $\alpha$ (выполните рисунок самостоятельно).

Задача 3. Точки $P$, $T$ и $E$ принадлежат соответственно ребрам $AB$, $SC$ и $AS$ треугольной пирамиды $SABC$. Постройте сечение пирамиды плоскостью $\alpha$, проходящей через прямую $PT$ и параллельной прямой $EC$.

Решение.

1) Плоскость $\alpha$ проходит через точку $T$ и параллельна прямой $EC$, следовательно, она пересекает плоскость $SAC$ по прямой, проходящей через точку $T$ и параллельной прямой $EC$. Построим точку $X_1 = l \cap SA$ ($l \parallel EC$, $T \in l$). Тогда плоскость $\alpha$ пересекает $SAC$ по отрезку $TX_1$, а грань $SAB$ — по отрезку $X_1P$ (рис. 103, *а*).

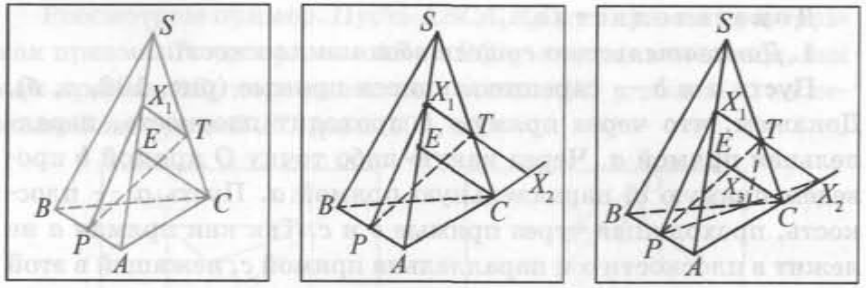



Рис. 103

2) Строим точку $X_2 = X_1T \cap AC$ (точка $X_2$ лежит в секущей плоскости) (рис. 103, *б*).

3) Находим точку $X_3 = X_2P \cap BC$. Секущая плоскость пересекает грани $ABC$ и $SBC$ по отрезкам $X_3P$ и $X_3T$ соответственно. Таким образом, четырехугольник $X_1PX_3T$ — искомое сечение (рис. 103, *в*).

## Вопросы и задачи к § 3

**1.** Прямая $l$ лежит в плоскости $\alpha$, а прямая $b$ пересекает плоскость $\alpha$ в точке $A$. Верно ли утверждение, что прямые $l$ и $b$ скрещивающиеся?

**2.** Точки $A$, $B$ и $C$ принадлежат плоскости $\alpha$ и не лежат на одной прямой, точка $D$ не принадлежит плоскости $\alpha$. Сколько пар скрещивающихся прямых определяют данные точки?

**3.** Верно ли утверждение, что две прямые являются скрещивающимися, если они лежат в разных плоскостях?

**4.** $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма (рис. 104, *а*). а) Верно ли утверждение, что прямые $AB$ и $CB_1$ — скрещивающиеся? б) Докажите, что прямые $A_1C_1$ и $CB$ являются скрещивающимися. в) Назовите какую-либо прямую, которая является скрещивающейся для прямой $BB_1$.

**5.** $ABCD$ — треугольная пирамида, точка $F$ лежит на ребре $BC$, $O \in AD$ (рис. 104, *б*). а) Верно ли утверждение, что прямые $AD$ и $BC$ являются скрещивающимися? б) Докажите, что прямые $DF$ и $AC$ являются скрещивающимися. в) Приведите примеры прямых, которые являются скрещивающимися для прямой $CO$.



**6.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед (рис. 104, *в*). а) Докажите, что прямые $DC_1$ и $CB_1$ скрещиваются. б) Верно ли, что прямые $B_1C$ и $AD$ пересекаются? в) Являются ли прямые $BC$ и $DC_1$ скрещивающимися?

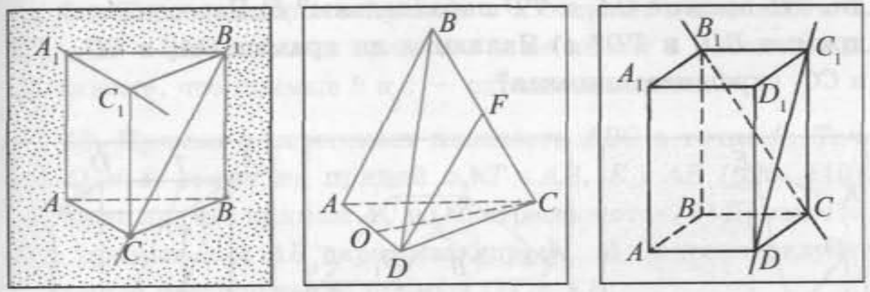



Рис. 104

**7.** $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, точка $O$ лежит на ребре $CB$. а) Верно ли, что прямые $AB$ и $C_1O$ — скрещивающиеся? б) Докажите, что прямые $AC$ и $C_1O$ — скрещивающиеся.

**8.** Прямоугольники $ABCD$ и $CDEK$ не лежат в одной плоскости, $O \in CK$, $X \in CB$ и $M \in CD$ (рис. 105). а) Установите взаимное расположение прямых $OX$ и $ME$. б) Пересекаются ли прямые $CD$ и $OX$? в) Верно ли, что прямые $OX$ и $KE$ — скрещивающиеся?

**9.** Точка $O$ не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$, а точка $T$ — середина отрезка $OB$. а) Докажите, что прямые $OA$ и $BD$ — скрещивающиеся. б) Пересекаются ли прямые $TC$ и $BD$? в) Установите взаимное расположение прямых $AO$ и $TC$.

**10.** На рисунке 106 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. а) Докажите, что прямые $BA_1$ и $AC$ скрещиваются. б) Верно ли, что прямые $BC$ и $DC_1$ пересекаются? в) Установите взаимное расположение прямых $A_1B$ и $DC_1$. г) Охарактеризуйте взаимное расположение прямых $A_1B$ и $D_1C_1$.

**11.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. а) Верно ли, что прямые $DB$ и $CD_1$ скрещивающиеся? б) Пересекаются ли прямые $AC$ и $DB_1$? в) Верно ли, что прямые $DB_1$ и $KT$ лежат в одной плоскости (точка $K$ — середина ребра $B_1C_1$, а точка $T$ — середина ребра $DC$)?

**12.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед (рис. 107). а) Верно ли, что прямые $OA_1$ и $TD$ параллельны? б) Пересекаются ли прямые $BD_1$ и $TD$? в) Являются ли прямые $OA_1$ и $CC_1$, $TD$ и $CC_1$ скрещивающимися?

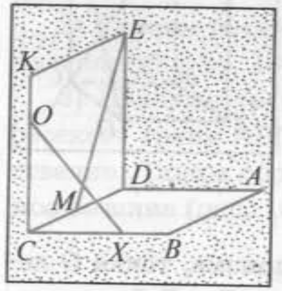


Рис. 105

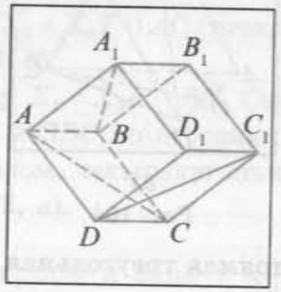


Рис. 106

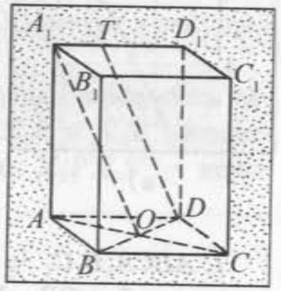


Рис. 107

**13.** $DABC$ — треугольная пирамида. Точки $K$, $T$ и $E$ — середины ребер $AD$, $CB$ и $DB$ соответственно. а) Выясните, как расположены прямые $AD$ и $CB$. б) Верно ли, что прямые $AE$ и $KT$ пересекаются? в) Сколько пар скрещивающихся прямых определяют вершины тетраэдра?

**14.** Прямые $a$ и $b$ параллельны, а прямая $c$ пересекает прямую $a$ и не пересекает прямую $b$. Докажите, что прямые $b$ и $c$ — скрещивающиеся.

**15.** Плоскости $\alpha$ и $\beta$ пересекаются по прямой $m$, а прямая $a$ пересекает плоскости $\alpha$ и $\beta$ соответственно в точках $A$ и $B$ не лежащих на прямой $m$ (рис. 108). Докажите, что прямые $m$ и $a$ — скрещивающиеся.

**16.** Даны скрещивающиеся прямые $a$ и $b$. Точки $A$ и $B$ лежат на прямой $a$, точки $C$ и $D$ — на прямой $b$. Докажите, что прямые $AC$ и $BD$ — скрещивающиеся.



**17.** Прямая $m$ пересекает плоскость, в которой лежит параллелограмм $ABCD$ в точке $A$, $O \in m$, $T \in m$ (рис. 109). а) Установите взаимное расположение прямых $OC$ и $DT$. Дайте обоснование ответа. б) Докажите, что прямые $AB$ и $OC$ — скрещивающиеся. в) Верно ли, что прямые $TD$ и $BC$ пересекаются?

**18.** Пересекающиеся прямые $a$ и $b$ лежат в плоскости $\alpha$. Прямая $c$ параллельна прямой $a$ и не лежит в плоскости $\alpha$. Докажите, что прямые $b$ и $c$ — скрещивающиеся.

**19.** Прямая $a$ пересекает плоскость $ABC$ в точке $C$. Точки $O$ и $E$ лежат на прямой $a$, $T \in AB$, $K \in AB$ (рис. 110). а) Верно ли, что прямые $AC$ и $OT$ пересекаются? б) Докажите, что прямые $a$ и $AB$ скрещивающиеся. в) Охарактеризуйте взаимное расположение прямых $OT$ и $EK$.

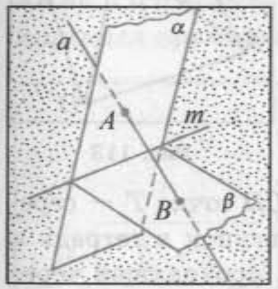


Рис. 108

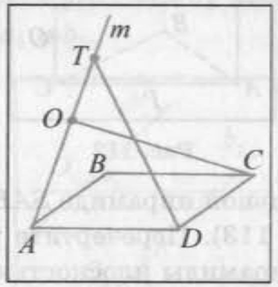


Рис. 109

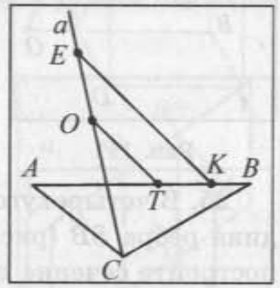


Рис. 110

**20.** Через вершину $A$ треугольника $ABC$ проведена прямая $a$, параллельная медиане $CK$ этого треугольника, а через вершину $B$ — прямая $c$, не лежащая в плоскости треугольника. Докажите, что прямые $a$ и $c$ — скрещивающиеся.

**21.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $O \in BC$ (рис. 111). а) Докажите, что прямые $C_1O$ и $AB$ — скрещивающиеся. б) Верно ли, что прямые $D_1C$ и $BB_1$ скрещиваются? в) Верно ли, что прямые $D_1C$ и $C_1O$ параллельны? Дайте обоснование ответа.

**22.** Точки $T$ и $K$ — середины ребер $AC$ и $SB$ треугольной пирамиды $SABC$ соответственно. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую $CK$ и параллельной прямой $ST$.

**23.** Точки $T$, $O$ и $P$ принадлежат ребрам $BB_1$, $CC_1$, $AC$ треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ соответственно (рис. 112). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через прямую $PO$ и параллельной прямой $CT$.

**24.** В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки $T$, $O$, $E$ и $K$ — середины ребер $C_1C$, $CA$, $CB$ и $BB_1$ соответственно. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через прямую $TO$ и параллельной прямой $EK$.

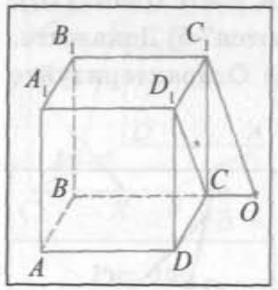



Рис. 111

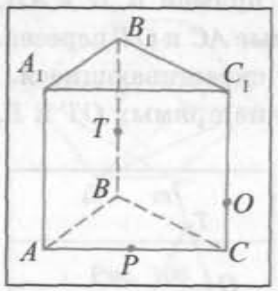



Рис. 112

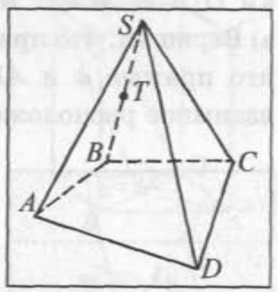



Рис. 113

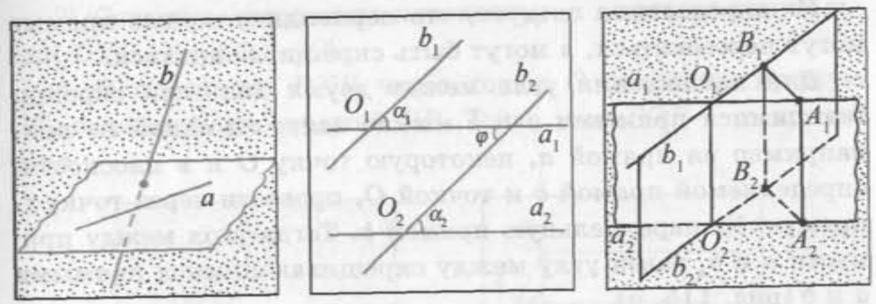
**25.** В четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка $T$ — середина ребра $SB$ (рис. 113). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую $TD$ и параллельной прямой $AC$.

**26.** В четырехугольной пирамиде $SABCD$ точки $Q$ и $P$ — середины ребер $SB$ и $SC$ соответственно, а точка $R$ — точка пересечения диагоналей $AC$ и $BD$ основания. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую $DQ$ и параллельной прямой $PR$.

## § 4. Угол между прямыми

Любые две пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и образуют четыре неразвернутых угла. Если пересекающиеся прямые образуют тупые и острые углы, то углом между этими прямыми называется тот, который не превосходит любой из трех остальных углов. Если пересекающиеся прямые образуют четыре равных угла, то угол между этими прямыми равен $90°$. Угол $\alpha$ между двумя пересекающимися прямыми удовлетворяет условию: $0 < \alpha \leqslant 90°$.

Теперь введем понятие угла между скрещивающимися прямыми. Пусть $a$ и $b$ — две скрещивающиеся прямые (рис. 114, *а*). Возьмем произвольную точку $O_1$ в пространстве и проведем через нее прямые $a_1$ и $b_1$, параллельные прямым $a$ и $b$ соответственно. ***Углом между скрещивающимися прямыми $a$ и $b$ называется угол между построенными пересекающимися прямыми $a_1$ и $b_1$.***




*а)* *б)* *в)*

Рис. 114

Докажем, что угол между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки $O_1$. Возьмем любую другую точку $O_2$ и проведем через нее прямые $a_2$ и $b_2$, параллельные прямым $a$ и $b$ соответственно. Пусть угол между прямыми $a_1$ и $b_1$ равен $\alpha_1$, а угол между прямыми $a_2$ и $b_2$ равен $\alpha_2$.

Если прямые $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$ лежат в одной плоскости, то по свойству накрест лежащих углов при параллельных прямых $\alpha_1 = \varphi = \alpha_2$ (рис. 114, *б*).

Пусть теперь прямые $a_1$ и $b_1$, пересекающиеся в точке $O_1$, лежат в одной плоскости, а прямые $a_2$ и $b_2$, пересекающиеся в точке $O_2$, — в другой плоскости (рис. 114, *в*). Возьмем на прямых $a_1$, $b_1$ и $a_2$, $b_2$ точки $A_1$, $B_1$ и $A_2$, $B_2$ так, чтобы $\angle A_1O_1B_1 = \alpha_1$, а четырехугольники $A_1A_2O_2O_1$ и $B_1B_2O_2O_1$ были параллелограммами ($O_1A_1 = O_2A_2$, $O_1B_1 = O_2B_2$). Тогда четырехугольник $A_1B_1B_2A_2$ — параллелограмм ($B_1B_2 = O_1O_2$, $B_1B_2 \parallel O_1O_2$, $A_1A_2 = O_1O_2$, $A_1A_2 \parallel O_1O_2$, значит, $B_1B_2 = A_1A_2$, $B_1B_2 \parallel A_1A_2$). Отсюда следует, что $A_1B_1 = A_2B_2$. Таким образом, треугольники $A_1O_1B_1$ и $A_2O_2B_2$ равны по трем сторонам. Из равенства этих треугольников следует, что $\alpha_1 = \alpha_2$.

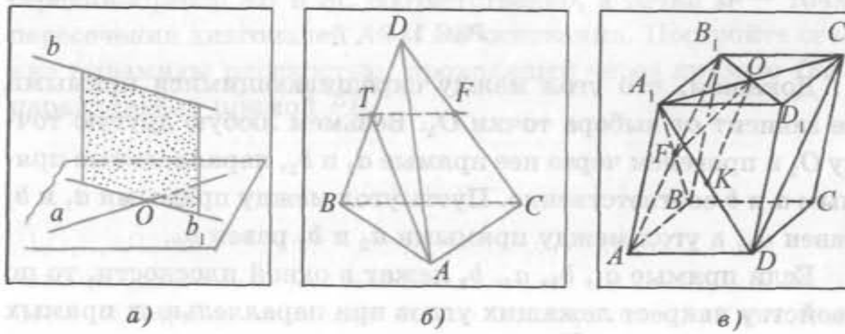
Из определения угла между скрещивающимися прямыми следует, что он не превосходит $90°$.

Угол между параллельными прямыми считается равным $0°$.

Две прямые называются *взаимно перпендикулярными* (*перпендикулярными*), если угол между ними равен $90°$. Если прямая $a$ перпендикулярна прямой $b$, то пишут $a \perp b$ и читают: «Прямая $a$ перпендикулярна прямой $b$».

Из определения следует, что перпендикулярные прямые могут пересекаться, а могут быть скрещивающимися.

Для нахождения угла между двумя данными скрещивающимися прямыми $a$ и $b$ можно взять на одной из них, например на прямой $a$, некоторую точку $O$ и в плоскости, определяемой прямой $b$ и точкой $O$, провести через точку $O$ прямую $b_1$, параллельную прямой $b$. Тогда угол между прямыми $a$ и $b_1$ равен углу между скрещивающимися прямыми $a$ и $b$ (рис. 115, *а*).



а) б) в)

Рис. 115



Например, пусть на ребре $DB$ треугольной пирамиды $DABC$ взята точка $T$ (рис. 115, *б*). Тогда угол между скрещивающимися прямыми $BC$ и $AT$ равен углу между прямой $AT$ и прямой $TF$, которая проходит через точку $T$ параллельно прямой $BC$ в плоскости $BDC$.

Рассмотрим еще пример. Пусть в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка $O$ — точка пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$, а точка $F$ — точка пересечения диагоналей грани $AA_1B_1B$. Угол между скрещивающимися прямыми $C_1D$ и $OF$ равен углу между прямыми $OF$ и прямой $OK$, проходящей через точку $O$ и параллельной прямой $C_1D$ в плоскости $C_1DA_1$ (рис. 115, *в*).

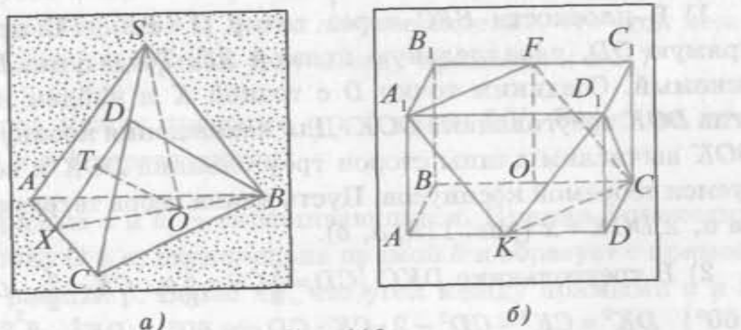
Задача 1. В треугольной пирамиде $SABC$ точка $D$ принадлежит ребру $SC$, а точка $O$ лежит внутри треугольника $ABC$. Постройте угол между прямыми $SO$ и $BD$.

Решение.

1) Рассмотрим плоскость $\alpha$, проходящую через прямую $DB$ и точку $O$ (рис. 116, *а*).

2) Сечением пирамиды плоскостью $\alpha$ является треугольник $DXB$ ($X = BO \cap AC$).

3) В плоскости $DXB$ через точку $O$ проводим прямую $OT$, параллельную прямой $DB$. Тогда угол $SOT$ — искомый угол.



а) б)

Рис. 116

Задача 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 1$ см, $AD = 2$ см, $AA_1 = 1$ см. Найдите угол между прямыми $A_1F$ и $D_1K$, где точки $F$ и $K$ — середины ребер $B_1C_1$ и $AD$ соответственно.

Решение.

I. *Построение искомого угла.*

1) Рассмотрим плоскость $\alpha$, проходящую через прямую $A_1F$ и точку $K$ (рис. 116, *б*).

2) Плоскость $\alpha$ проходит через прямую $A_1K$, параллельную плоскости грани $BB_1C_1C$ (так как $A_1K \parallel B_1O$, где точка $O$ — середина ребра $BC$), а следовательно, пересекает эту грань по отрезку, параллельному прямой $B_1O$, т. е. по отрезку $FC$.

3) Сечение параллелепипеда плоскостью $\alpha$ есть четырехугольник $KA_1FC$, который является параллелограммом (так как $A_1K = FC$, $A_1K \parallel FC$). Следовательно, $KC \parallel A_1F$. Отсюда следует, что угол $D_1KC$ — искомый.

II. *Нахождение градусной меры угла.*

1) Градусную меру угла $D_1KC$ найдем из треугольника $D_1KC$.

2) $\triangle KDD_1 = \triangle CDD_1$ ($DK = DC$, $\angle KDD_1 = \angle CDD_1 = 90°$, $DD_1$ — общая сторона), $\triangle KDC = \triangle CDD_1$ ($DK = DD_1$, $DC$ — общая сторона, $\angle KDC = \angle CDD_1 = 90°$). Отсюда следует, что треугольник $D_1KC$ — равносторонний. Значит, $\angle D_1KC = 60°$.

Задача 3. $SABC$ — правильный тетраэдр. Точки $F$ и $K$ — середины его ребер $AB$ и $AC$ соответственно. Найдите косинус угла между прямыми $SF$ и $BK$ (рис. 117).

Решение.

1) В плоскости $SFC$ через точку $O = BK \cap FC$ проведем прямую $OD$, параллельную прямой $SF$. Тогда угол $DOK$ — искомый. Соединим точку $D$ с точкой $K$ и найдем косинус угла $DOK$ треугольника $DOK$. Для нахождения косинуса угла $DOK$ вычислим длины сторон треугольника $DOK$ и воспользуемся теоремой косинусов. Пусть длина ребра тетраэдра равна $a$, $\angle DOK = x$ (рис. 118, *а*, *б*).

2) В треугольнике $DKC$ $\left(CD = \frac{2}{3}CS = \frac{2}{3}a,\ CK = \frac{a}{2},\ \angle KCD = 60°\right)$ $DK^2 = CK^2 + CD^2 - 2 \cdot CK \cdot CD \cos 60°$, $DK^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{9} - 2 \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2}$, $DK^2 = \frac{13a^2}{36}$.

3) В треугольнике $SFC$ $OD \parallel SF$, $OC = \frac{2}{3}FC$, следовательно, $OD = \frac{2}{3}SF = \frac{2}{3}\sqrt{SA^2 - FA^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.



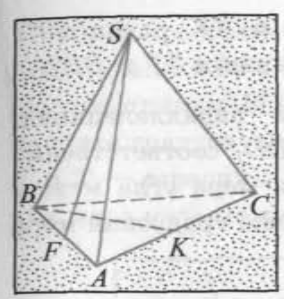



Рис. 117

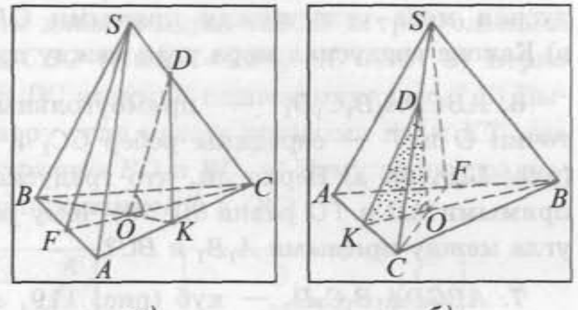



Рис. 118

4) В треугольнике $DOK$ $\left(OD = \frac{a}{\sqrt{3}},\ OK = \frac{1}{3}BK = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$ $DK^2 = OD^2 + OK^2 - 2 \cdot OD \cdot OK \cos x$, $\frac{13a^2}{36} = \frac{a^2}{3} + \frac{3a^2}{36} - 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cos x$. Отсюда $\cos x = \frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

## Вопросы и задачи к § 4

**1.** Какой угол называется углом между скрещивающимися прямыми?

**2.** Пусть $a$ и $b$ — скрещивающиеся прямые, а прямая $b_1$ параллельна прямой $b$. Верно ли утверждение, что угол между прямыми $a$ и $b$ равен углу между прямыми $a$ и $b_1$?

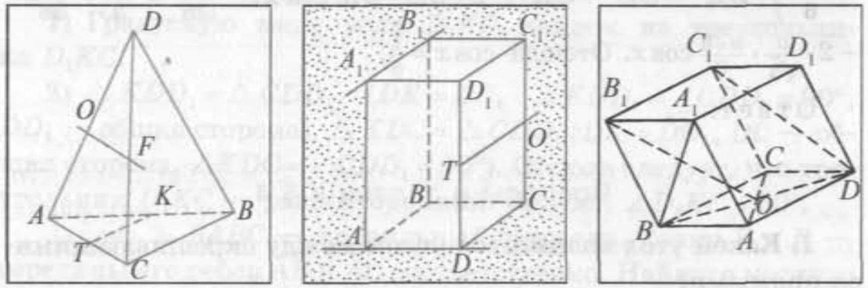
**3.** Угол между прямыми $a$ и $b$ равен 90°. Верно ли, что прямые $a$ и $b$ пересекаются?

**4.** Прямые $a$ и $b$ — скрещивающиеся. Прямая $l$ проходит через точку $O \in a$, параллельна прямой $b$ и образует с прямой $a$ угол, равный $\beta$. Верно ли, что угол между прямыми $a$ и $b$ равен $\beta$?

**5.** $DABC$ — правильный тетраэдр, точки $O$ и $F$ — середины ребер $AD$ и $CD$ соответственно, отрезок $TK$ — средняя линия треугольника $ABC$ (рис. 119, *а*). а) Чему равна градусная мера угла между прямыми $OF$ и $CB$? б) Верно ли, что градусная мера угла между прямыми $OF$ и $TK$ равна 60°? в) Какова градусная мера угла между прямыми $TF$ и $DB$?

**6.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, точки $O$ и $T$ — середины ребер $CC_1$ и $DD_1$ соответственно (рис. 119, *б*). а) Верно ли, что градусная мера угла между прямыми $AD$ и $TO$ равна 90°? б) Чему равна градусная мера угла между прямыми $A_1B_1$ и $BC$?

**7.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 119, *в*). а) Верно ли, что угол между прямыми $A_1B$ и $C_1D$ равен 90°? б) Вычислите градусную меру угла между прямыми $B_1O$ и $C_1D$. в) Верно ли, что градусная мера угла между прямыми $AC$ и $C_1D$ равна 45°?




а) б) в)

Рис. 119

**8.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка $O$ — точка пересечения диагоналей грани $DD_1C_1C$. а) Вычислите градусную меру угла между прямыми $A_1O$ и $AB_1$. б) Верно ли, что градусная мера угла между прямыми $A_1O$ и $KT$ (точки $K$ и $T$ — середины ребер $AA_1$ и $AD$ соответственно) равна 30°?

**9.** Два квадрата $ABCD$, $BCKT$ и прямоугольный треугольник $ABT$ ($\angle ABT = 90°$) расположены в пространстве так, как показано на рисунке 120. Точки $P$ и $O$ — середины отрезков $AB$ и $BC$ соответственно. а) Вычислите градусную меру угла между прямыми $PO$ и $DK$. б) Верно ли, что градусная мера угла между прямыми $TC$ и $DK$ равна 90°? в) Вычислите градусную меру угла между прямыми $AT$ и $KF$, где точка $F$ — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$.



**10.** В пространстве даны квадрат $ABCD$ и треугольники $ABO$ ($\angle ABO = 90°$) и $CBO$ ($\angle CBO = 90°$), $BC = BO$. а) Верно ли, что прямые $BO$ и $DC$ взаимно перпендикулярны? б) Вычислите градусную меру угла между прямыми $AC$ и $KT$, где $K$ и $T$ — середины отрезков $BO$ и $BC$. в) Чему равна градусная мера угла между прямыми $BD$ и $OC$?

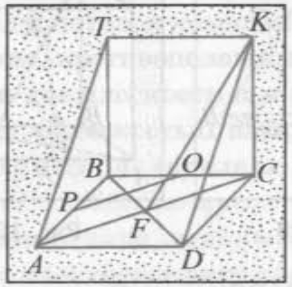



Рис. 120

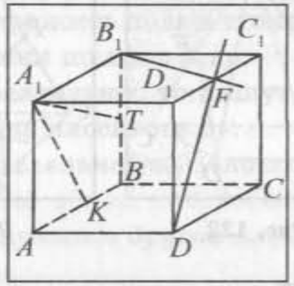



Рис. 121

**11.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точки $K$, $F$ и $T$ — середины ребер $AB$, $D_1C_1$ и $B_1B$ соответственно (рис. 121). а) Верно ли, что прямые $A_1T$ и $DF$ взаимно перпендикулярны? б) Чему равна градусная мера угла между прямыми $AB$ и $CC_1$? в) Вычислите косинус угла между прямыми $A_1K$ и $B_1F$.

**12.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 1$ см, $AA_1 = 1$ см, $AD = 3$ см. Точки $F$ и $K$ лежат на ребрах $B_1C_1$ и $AD$ так, что $B_1F : B_1C_1 = 2 : 3$, $AK : AD = 1 : 3$. Найдите угол между прямыми $A_1F$ и $D_1K$.

**13.** $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, каждое ребро которой равно $a$, точка $F$ — середина ребра $SC$ (рис. 122). а) Найдите угол между прямыми $AB$ и $SD$. б) Перечертите рисунок в тетрадь. Постройте угол между прямыми $DF$ и $AC$, найдите этот угол.

**14.** В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ каждое ребро равно $a$. Точка $K$ — середина ребра $SA$. Постройте угол между прямыми $AD$, $CK$ и найдите его.

**15.** $SABC$ — правильный тетраэдр. Медианы грани $ABC$ пересекаются в точке $O$. Точки $P$, $E$ и $D$ — середины ребер

*SC*, *SA* и *SB* соответственно (рис. 123). а) Найдите градусную меру угла между прямыми *BC* и *PE*. б) Перечертите рисунок в тетрадь. Постройте угол между прямыми *BC* и *OD*, найдите градусную меру этого угла.

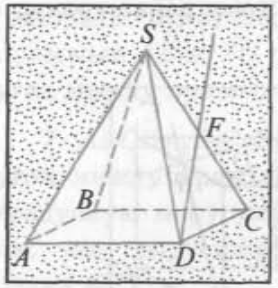



Рис. 122

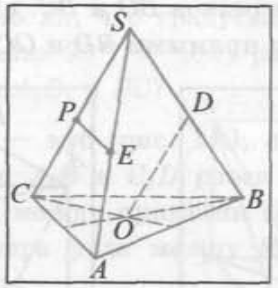



Рис. 123

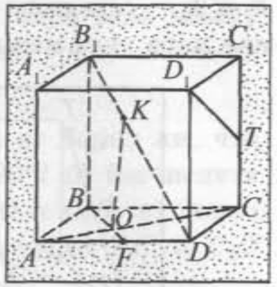



Рис. 124

**16.** В правильном тетраэдре *SABC* точка *O* — точка пересечения медиан основания *ABC*, а точка *D* — середина ребра *SB*. Найдите градусную меру угла между прямыми *AC* и *OD*.

**17.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки *F* и *T* — середины ребер *AD* и $CC_1$ соответственно, $DK : DB_1 = 2 : 3$, $O = AC \cap BF$ (рис. 124). а) Докажите, что прямые *OK* и $D_1T$ взаимно перпендикулярны. б) Найдите угол между прямыми *OK* и *DC*. в) Вычислите косинус угла между прямыми *OK* и $A_1D$.

## § 5. Параллельность плоскостей

**1. Признак параллельности плоскостей.** В данном параграфе рассмотрим свойства параллельных плоскостей.

**Определение.** *Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.*

Представление о параллельных плоскостях дают, например, пол и потолок комнаты, поверхность пола и стоящего на нем стола, противоположные стенки шкафов и др.

Если две плоскости α и β параллельны, то пишут $\alpha \parallel \beta$ и говорят: «Плоскость α параллельна плоскости β».

**Теорема 1** (*признак параллельности плоскостей*). *Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*

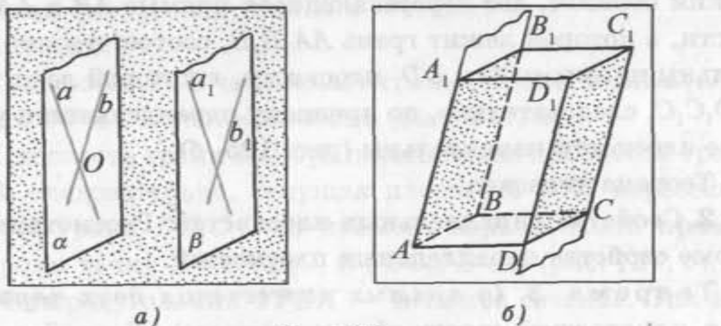



Рис. 125

**Доказательство.**

Пусть даны две плоскости α и β. В плоскости α лежат пересекающиеся в точке *O* прямые *a* и *b*, а в плоскости β — прямые $a_1$ и $b_1$ такие, что $a \parallel a_1$ и $b \parallel b_1$ (рис. 125, *а*). Заметим, что каждая из прямых *a* и *b* параллельна плоскости β ($a \parallel \beta$, $b \parallel \beta$).

Предположим, что плоскости α и β не параллельны. Пусть они пересекаются по прямой *c*. Тогда плоскость α проходит через прямую *a*, параллельную плоскости β, и пересекает плоскость β по прямой *c*, следовательно, прямая *a* параллельна прямой *c* (см. теорему 2, § 2). Аналогично плоскость α проходит через прямую *b*, параллельную плоскости β, и пересекает ее по прямой *c*, значит, прямая *b* параллельна прямой *c*.

Таким образом, исходя из предположения, получили, что через точку $O$ проходят две прямые $a$ и $b$, параллельные прямой $c$. Но это противоречит теореме о том, что через точку $O$ проходит единственная прямая, параллельная прямой $c$. Следовательно, наше предположение неверно и плоскости $\alpha$ и $\beta$ параллельны.

Теорема доказана.

**Теорема 2** (*о свойстве противолежащих граней параллелепипеда*). *Противолежащие грани параллелепипеда лежат в параллельных плоскостях.*

Доказательство.

Докажем, например, что грани $AA_1B_1B$ и $DD_1C_1C$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежат в параллельных плоскостях. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $AB \parallel CD$. Четырехугольник $AA_1D_1D$ — параллелограмм, следовательно, $AA_1 \parallel DD_1$. Таким образом, две пересекающиеся прямые $AB$ и $AA_1$ плоскости, в которой лежит грань $AA_1B_1B$, соответственно параллельны прямым $DC$ и $DD_1$ плоскости, в которой лежит грань $DD_1C_1C$, следовательно, по признаку параллельности указанные плоскости параллельны (рис. 125, *б*).

Теорема доказана.

**2. Свойства параллельных плоскостей.** Рассмотрим некоторые свойства параллельных плоскостей.

**Теорема 3** (*о прямых пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью*). *Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то прямые их пересечения параллельны между собой.*

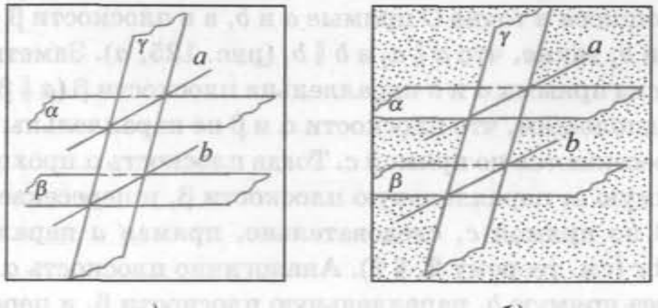



Рис. 126



Доказательство.

Пусть $\alpha$ и $\beta$ — параллельные плоскости, которые пересекает плоскость $\gamma$ (рис. 126, *а*, *б*). Рассмотрим прямые $a$ и $b$, по которым плоскость $\gamma$ пересекает плоскости $\alpha$ и $\beta$ соответственно. Докажем, что $a \parallel b$. Действительно, эти прямые лежат в одной плоскости $\gamma$ и не пересекаются. Если бы прямые $a$ и $b$ пересекались, то их общая точка принадлежала бы плоскостям $\alpha$ и $\beta$, чего быть не может, так как по условию они параллельны.

Таким образом прямые $a$ и $b$ лежат в одной плоскости и не пересекаются, т. е. $a \parallel b$.

Теорема доказана.

Задача 1. Точки $P$, $T$ и $E$ — середины ребер $AA_1$, $A_1B_1$ и $DD_1$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки $P$, $T$ и $E$. Какая фигура получается в сечении?

Решение.

1) Плоскость $PTE$ пересекает грани $AA_1B_1B$ и $AA_1D_1D$ по отрезкам $PT$ и $PE$ соответственно (рис. 127, *а*).

2) Плоскость грани $DD_1C_1C$ параллельна плоскости грани $AA_1B_1B$, следовательно, секущая плоскость $PTE$ пересекает плоскость грани $DD_1C_1C$ по прямой, параллельной прямой $PT$. Строим точку $X = l \cap D_1C_1$ ($l \parallel DC_1$, $E \in l$) (рис. 127, *б*).

3) Четырехугольник $TPEX$ — искомое сечение. Так как $PT \parallel EX$, $PT = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{1}{2}DC_1 = EX$, то четырехугольник $TPEX$ — параллелограмм (рис. 127, *в*).

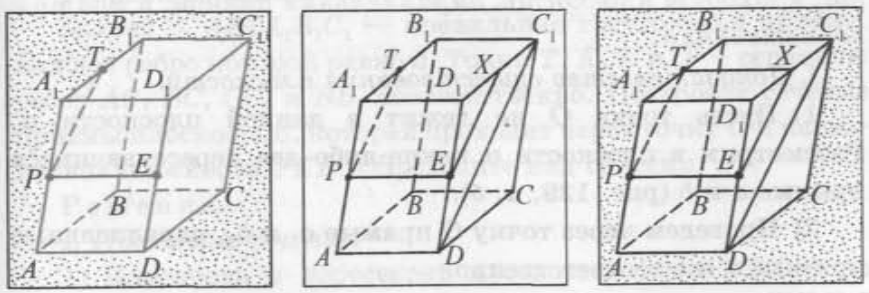
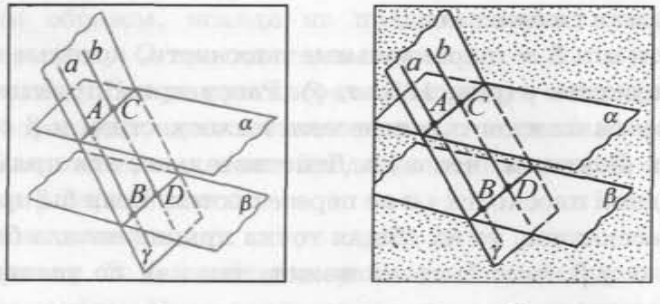



Рис. 127



а) Рис. 128 б)

**Теорема 4.** *Отрезки параллельных прямых, расположенные между параллельными плоскостями, равны.*

**Доказательство.**

Пусть $AB$ и $CD$ — отрезки параллельных прямых $a$ и $b$, расположенные между параллельными плоскостями $\alpha$ и $\beta$ (рис. 128, *а*, *б*). Докажем, что $AB = CD$. Плоскость $\gamma$, проходящая через параллельные прямые $a$ и $b$, пересекает плоскости $\alpha$ и $\beta$ по параллельным прямым $AC$ и $BD$ (теорема 2). Следовательно, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, так как в нем противолежащие стороны попарно параллельны. В параллелограмме противолежащие стороны равны, значит, $AB = CD$.

Теорема доказана.

**Теорема 5** (*о существовании единственной плоскости, параллельной данной плоскости и проходящей через точку вне ее*). *Через точку, не лежащую в данной плоскости, проходит плоскость, параллельная данной, и притом единственная.*

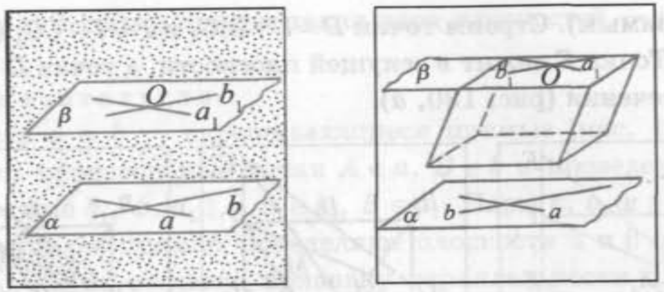
I. *Доказательство существования плоскости.*

1) Пусть точка $O$ не лежит в данной плоскости $\alpha$. Рассмотрим в плоскости $\alpha$ какие-либо две пересекающиеся прямые $a$ и $b$ (рис. 129, *а*, *б*).

2) Проведем через точку $O$ прямые $a_1$ и $b_1$, параллельные прямым $a$ и $b$ соответственно.

3) Рассмотрим плоскость $\beta$, проходящую через прямые $a_1$ и $b_1$.





а) Рис. 129 б)

4) Плоскость $\beta$ — искомая, так как она проходит через точку $O$ и по признаку параллельности двух плоскостей параллельна плоскости $\alpha$.

II. *Доказательство единственности плоскости.*

1) Допустим, что существует другая плоскость $\beta_1$, проходящая через точку $O$ и параллельная плоскости $\alpha$.

2) Плоскость $\gamma$, проходящая через точку $O$ и прямую $a$, пересекает плоскости $\beta$ и $\beta_1$, так как с каждой из них плоскость $\gamma$ имеет общую точку $O$.

3) Следовательно, линии пересечения $l$ и $l_1$ плоскости $\gamma$ с плоскостями $\beta$ и $\beta_1$ проходят через точку $O$ и параллельны прямой $a$ (теорема 3). Получили, что через точку $O$, не лежащую на прямой $a$, проходят две прямые, параллельные прямой $a$. Это противоречит теореме о том, что через точку $O$ вне прямой $a$ можно провести единственную прямую, параллельную данной. Значит, наше предположение неверно и плоскость $\beta$ единственная.

Теорема доказана.

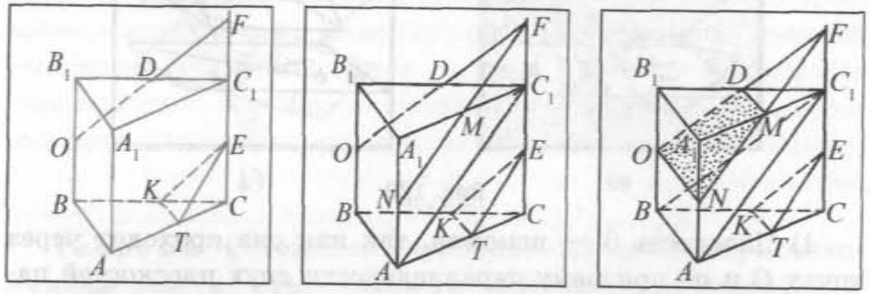
Задача 2. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, каждое ребро которой равно $a$. Точки $T$, $K$, $E$ и $O$ — середины ребер $AC$, $BC$, $CC_1$ и $BB_1$ соответственно. Постройте сечение призмы плоскостью, которая проходит через точку $O$ и параллельна плоскости $TKE$. Определите вид сечения.

**Решение.**

I. *Построим сечение.*

1) Плоскость $\alpha$ пересекает плоскость грани $BB_1C_1C$ по прямой, параллельной прямой $KE$ (плоскость грани $BB_1C_1C$ пересекает параллельные плоскости $KTE$ и $\alpha$ по параллель-

ным прямым). Строим точки $D = l \cap B_1C_1$ и $F = l \cap CC_1$ ($l \parallel KE$, $O \in l$). Точка $F$ лежит в секущей плоскости, а точка $D$ — вершина сечения (рис. 130, *а*).




*а)* *б)* *в)*

Рис. 130

2) Секущая плоскость пересекает грани $AA_1C_1C$ по прямой, параллельной $TE$. Строим точки $M = p \cap A_1C_1$, $N = p \cap AA_1$ ($p \parallel TE$, $F \in p$). $MN$ — отрезок, по которому плоскость $\alpha$ пересекает грань $AA_1C_1C$ (рис. 130, *б*).

3) Грани $B_1C_1A_1$ и $BB_1A_1A$ секущая плоскость пересекает по отрезкам $DM$ и $ON$ соответственно. Четырехугольник $ODMN$ — сечение (рис. 130, *в*).

II. *Докажем, что четырехугольник $ODMN$ — трапеция.*

1) Точка $O$ — середина отрезка $BB_1$, $OD \parallel BC_1$, следовательно, точка $D$ — середина отрезка $B_1C_1$.

2) $OB \parallel FC_1$, $OF \parallel BC_1$, значит, $OB = FC_1 = \frac{a}{2}$.

3) $NF \parallel AC_1$, $FC_1 \parallel AN$. Отсюда следует, что $AN = FC_1 = \frac{a}{2}$, т. е. точка $N$ — середина ребра $AA_1$.

4) Так как точка $N$ — середина отрезка $AA_1$ и $MN \parallel AC_1$, то точка $M$ — середина ребра $A_1C_1$.

5) Из 1) и 4) следует, что отрезок $DM$ — средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$, т. е. $DM \parallel BA_1$. Кроме того, $ON \parallel B_1A_1$. Значит, $ON \parallel DM$.

Четырехугольник $ODMN$ — трапеция, так как $ON \parallel DM$, а отрезок $OD$ не параллелен отрезку $MN$.

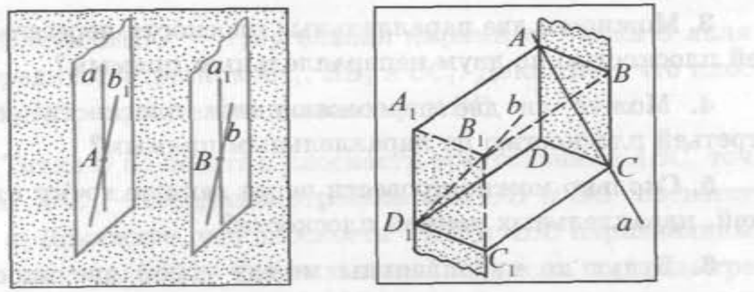
Задача 3. Докажите, что через две скрещивающиеся прямые $a$ и $b$ можно провести две параллельные плоскости $\alpha$



и $\beta$ ($a \subset \alpha$, $b \subset \beta$), и притом такая пара плоскостей — единственная.

Доказательство.

Пусть $a$ и $b$ — скрещивающиеся прямые (рис. 131, *а*). Возьмем произвольные точки $A \in a$, $B \in b$ и проведем через них прямые $b_1 \parallel b$, $a_1 \parallel a$, $A \in b_1$, $B \in a_1$. Пары $a$, $b_1$ и $b$, $a_1$ пересекающихся прямых определяют плоскости $\alpha$ и $\beta$ соответственно. Тогда согласно признаку параллельности плоскостей плоскости $\alpha$ и $\beta$ параллельны.




*а)* *б)*

Рис. 131

Докажем единственность существования такой пары плоскостей.

Допустим, что существует еще пара плоскостей $\alpha_1$ и $\beta_1$ таких, что $\alpha_1 \parallel \beta_1$, $a \subset \alpha_1$, $b \subset \beta_1$. Через точку $B$ и прямую $a$ проведем плоскость $\gamma$. Пусть эта плоскость пересекает плоскости $\beta$ и $\beta_1$ по прямым $c$ и $c_1$ соответственно. Так как $B \in b$, $b \subset \beta$, $b \subset \beta_1$, то прямые $c$ и $c_1$ проходят через точку $B$. Тогда по теореме 2 $a \parallel c$, $a \parallel c_1$, что противоречит тому, что через точку $B$ вне данной прямой $a$ можно провести единственную прямую, параллельную данной.

Полученное противоречие говорит о том, что наше предположение неверное, а следовательно, существует единственная пара плоскостей $\alpha$ и $\beta$, удовлетворяющих условию задачи.

Например, если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, тогда пара параллельных плоскостей, проходящих через скрещивающиеся прямые $AC$ и $B_1D_1$, есть плоскости граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 131, *б*).

## Вопросы и задачи к § 5

### I

**1.** Можно ли признак параллельности двух плоскостей сформулировать так: две плоскости параллельны, если две прямые одной плоскости параллельны двум прямым другой плоскости?

**2.** Верно ли утверждение, что если через каждую из параллельных прямых провести плоскость, то эти плоскости параллельны?

**3.** Можно ли две параллельные плоскости пересечь третьей плоскостью по двум непараллельным прямым?

**4.** Можно ли две пересекающиеся плоскости пересечь третьей плоскостью по параллельным прямым?

**5.** Сколько можно провести через данную точку плоскостей, параллельных данной плоскости?

**6.** Будут ли параллельны между собой две плоскости, если они параллельны одной и той же прямой?

**7.** Точка $A$ лежит в плоскости $\alpha$, которая параллельна плоскости $\beta$. Докажите, что каждая прямая, проходящая через точку $A$ и параллельная плоскости $\beta$, лежит в плоскости $\alpha$.

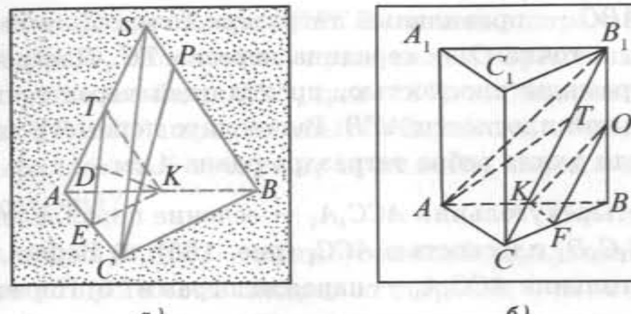
**8.** Плоскости $\alpha$ и $\beta$ параллельны, а прямая $l$ параллельна плоскости $\alpha$. Докажите, что прямая $l$ либо параллельна плоскости $\beta$, либо $l \subset \beta$.

**9.** Две плоскости $\alpha$ и $\beta$ параллельны плоскости $\gamma$. Докажите, что плоскости $\alpha$ и $\beta$ параллельны.

**10.** Точки $T$, $K$ и $E$ — середины ребер $SA$, $AB$ и $AC$ пирамиды $SABC$ соответственно, отрезок $DK$ — медиана треугольника $TKE$ (рис. 132, *а*). а) Докажите, что прямая $DK$ параллельна плоскости $SBC$. б) Верно ли, что прямая $CP$ пересекает плоскость $TKE$?

**11.** $ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма, точки $O$, $F$ и $K$ — середины ребер $BB_1$, $BC$ и $BA$ соответственно, $T \in CB_1$ (рис. 132, *б*). а) Докажите, что плоскости $ACB_1$ и $OKF$ параллельны. б) Верно ли, что прямая $AT$ параллельна плоскости $OKF$?






*а)* *б)*

Рис. 132

**12.** Пусть $SABC$ — треугольная пирамида. Точка $S$ является серединой отрезков $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$. Докажите, что плоскость $A_1B_1C_1$ параллельна плоскости $ABC$.

**13.** Точка $O$ не лежит в плоскости треугольника $ABC$, точки $T$, $K$ и $E$ — середины отрезков $OA$, $OB$ и $OC$ соответственно. а) Докажите, что плоскости $TKE$ и $ABC$ параллельны. б) Вычислите площадь треугольника $TKE$, если площадь треугольника $ABC$ равна 16 см$^2$ (рис. 133).

**14.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — четырехугольная призма. Докажите, что основания $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ призмы лежат в параллельных плоскостях.

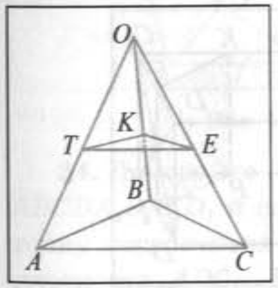



Рис. 133

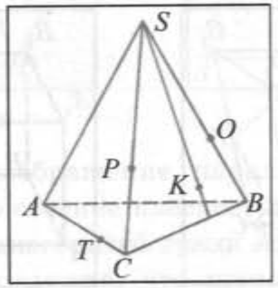



Рис. 134

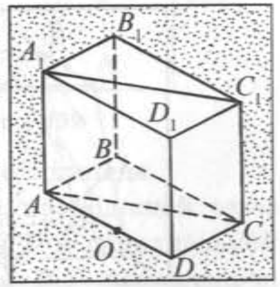



Рис. 135

**15.** $SABC$ — треугольная пирамида. Точки $T$, $P$ принадлежат ребрам $AC$ и $SC$ соответственно, а точка $K$ — грани $SCB$ (рис. 134). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку $O \in SB$ и параллельной плоскости $TPK$.

**16.** $SABC$ — правильный тетраэдр. Точка $T$ — середина ребра $SC$, а точка $O$ — середина отрезка $TC$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку $O$ и параллельной плоскости $ATB$. Вычислите периметр этого сечения, если длина ребра тетраэдра равна 4 см.

**17.** Четырехугольник $ACC_1A_1$ — сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью $ACC_1$ (рис. 135). а) Верно ли, что четырехугольник $ACC_1A_1$ — параллелограмм? б) Перечертите изображение параллелепипеда в тетрадь и постройте сечение плоскостью, проходящей через точку $O$ и параллельной плоскости $ACC_1$.

**18.** Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостями $AA_1C_1$ и $ADK$, где точка $K$ — середина ребра $CC_1$. Постройте отрезок, по которому пересекаются эти сечения.

**19.** На рисунке 136 изображено сечение $B_1XDT$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точку $B_1$ и параллельной плоскости $AKC$, где точка $K$ — середина ребра $BB_1$. а) Верно ли, что четырехугольник $B_1XDT$ — параллелограмм? б) Докажите, что прямые $KO$ и $B_1D$ параллельны, где $O = BD \cap AC$.

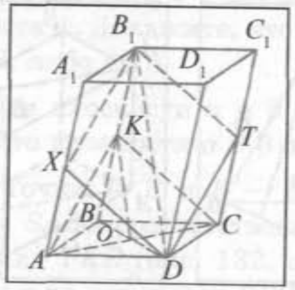



Рис. 136

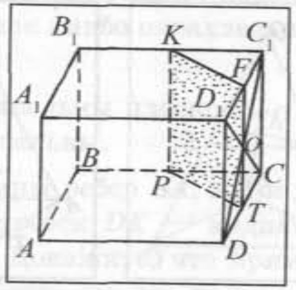



Рис. 137

**20.** Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте его сечение плоскостью, проходящей через середину ребра $DD_1$ и параллельной плоскости $AKC$, где точка $K$ — середина ребра $BB_1$. Постройте отрезок, по которому построенное сечение пересекает диагональное сечение $BDD_1B_1$.



**21.** Четырехугольник $PTFK$ — сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точку $O$ и параллельной плоскости $BDD_1$ (рис. 137). а) Объясните, почему прямые $KF$ и $PT$ параллельны. б) Верно ли, что прямые $PK$ и $TF$ параллельны? в) Почему прямая $AA_1$ параллельна плоскости сечения?

**22.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, основание которого есть квадрат со стороной 1 см, а длина его бокового ребра — 4 см. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через середину ребра $AA_1$ и параллельной плоскости $ADC_1$. Вычислите его периметр.

**23.** Четырехугольник $TKC_1C$ — сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точку $O$ и ребро $CC_1$ (рис. 138). а) Верно ли, что прямая $KT$ параллельна прямой $CC_1$? б) Докажите, что прямая $BB_1$ параллельна плоскости $TKC_1C$.

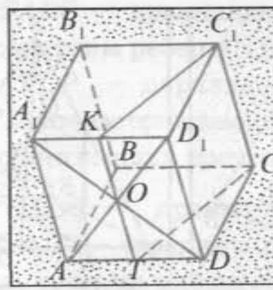



Рис. 138

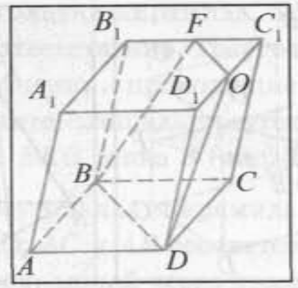



Рис. 139

**24.** Постройте изображение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и его сечение плоскостью, проходящей через точку пересечения диагоналей грани $ABCD$ и параллельной плоскости $ADC_1$. Докажите, что прямая $B_1D$ параллельна плоскости сечения.

**25.** Четырехугольник $BDOF$ — сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через прямую $BD$ и середину $O$ ребра $D_1C_1$ (рис. 139). а) Докажите, что прямые $BD$ и $FO$ параллельны. б) Верно ли, что четырехугольник $BDOF$ является трапецией?

**26.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая четырехугольная призма, основание которой — ромб со стороной 6 см и острым углом 60°. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через меньшую диагональ $B_1D_1$ ромба и середину ребра $AD$. Вычислите площадь сечения, если длина бокового ребра призмы равна 10 см.

**27.** Четырехугольник $BFD_1O$ — сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через прямую $BD_1$ и середину $O$ ребра $AA_1$ (рис. 140). а) Докажите, что четырехугольник $BFD_1O$ — параллелограмм. б) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку $A$ и параллельной плоскости сечения $BFD_1O$.

**28.** Все ребра прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны между собой. Вычислите площадь боковой поверхности призмы, если площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины $A$, $B$ и середину ребра $CC_1$, равна $S$.

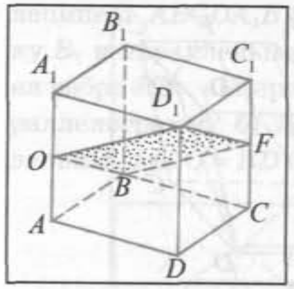


Рис. 140

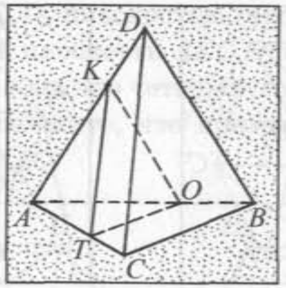


Рис. 141

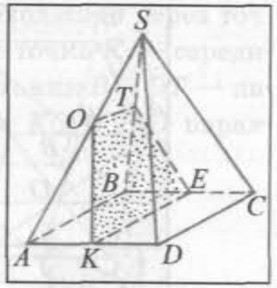


Рис. 142

**29.** Треугольник $TKO$ — сечение правильной треугольной пирамиды $DABC$ плоскостью, проходящей через точку $O$ $(BO : OA = 1 : 2)$ и параллельной плоскости $DBC$ (рис. 141). Докажите, что треугольники $TKO$ и $CDB$ подобны. Вычислите периметр треугольника $TKO$, если длина стороны основания пирамиды равна 3 см, а длина бокового ребра — 9 см.

**30.** В треугольной пирамиде $DABC$ сечение, параллельное плоскости $ABC$, делит боковое ребро в отношении $1 : 3$ (считая от вершины). Вычислите площадь сечения, если площадь треугольника $ABC$ равна $S$.



**31.** В пирамиде $DABC$ сечение, параллельное основанию, делит боковое ребро в отношении $2 : 3$ (считая от вершины). Вычислите площадь сечения, если его площадь на 84 см$^2$ меньше площади основания.

**32.** Четырехугольник $OTEK$ — сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через точку $O$ $(SO : OA = 2 : 3)$ и параллельной плоскости $SCD$ (рис. 142). Вычислите периметр сечения, если $CD = 30$ см, $SD = 25$ см.

**33.** $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, а угол при вершине $S$ грани $DSC$ равен 60°. Через точку $O$, взятую на ребре $AD$, проведено сечение плоскостью, параллельной грани $SDC$. Вычислите периметр этого сечения, если длина его диагонали равна 7 см, а $AO = 3$ см.

## II

**34.** $TABC$ — правильная треугольная пирамида. Точки $D$ и $E$ — середины ребер $AB$ и $TA$ соответственно. Треугольники $EKC$ и $TDP$ — параллельные сечения, проходящие через $CE$ и $TD$ соответственно. Вычислите площадь треугольника $TDP$, если площадь треугольника $EKC$ равна $S$ (рис. 143).

**35.** $SABC$ — правильная треугольная пирамида. Точки $F$, $K$ и $T$ — середины ребер $SC$, $AC$ и $AB$ соответственно. Площадь сечения плоскостью, проходящей через прямую $AF$ и параллельной прямой $BC$, равна $Q$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки $K$, $T$ и параллельной прямой $AF$.

**36.** Боковое ребро четырехугольной пирамиды разделено на три равные части, и через точки деления проведены плоскости, параллельные плоскости основания. Найдите площадь полученных сечений, если площадь основания равна $S$.

**37.** $SABC$ — треугольная пирамида. Точка $O$ делит боковое ребро $SA$ пирамиды в отношении $2 : 3$ (считая от вершины). Треугольник $OEK$ — сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку $O$ и параллельной плоскости $ABC$.

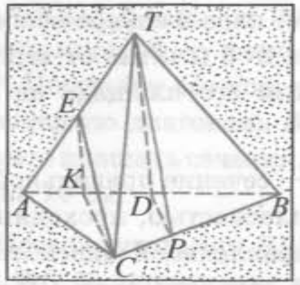



Рис. 143

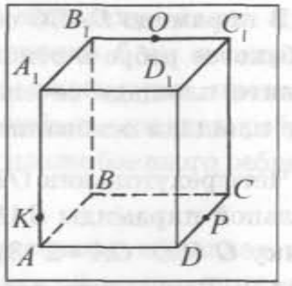



Рис. 144

Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $SOEK$, если площадь боковой поверхности пирамиды $SABC$ равна $Q$.

**38.** Площадь сечения пирамиды плоскостью $\alpha$, проходящей через точку на боковом ребре и параллельной основе, равна 5 см$^2$. В каком отношении плоскость $\alpha$ делит боковое ребро пирамиды, если площадь основания равна 45 см$^2$?

**39.** Длина стороны основания правильной треугольной пирамиды равна $a$, а длина бокового ребра — $b$. Через точку, делящую боковое ребро в отношении $1:3$ (считая от вершины пирамиды), проведено сечение, параллельное боковой грани. Найдите площадь этого сечения.

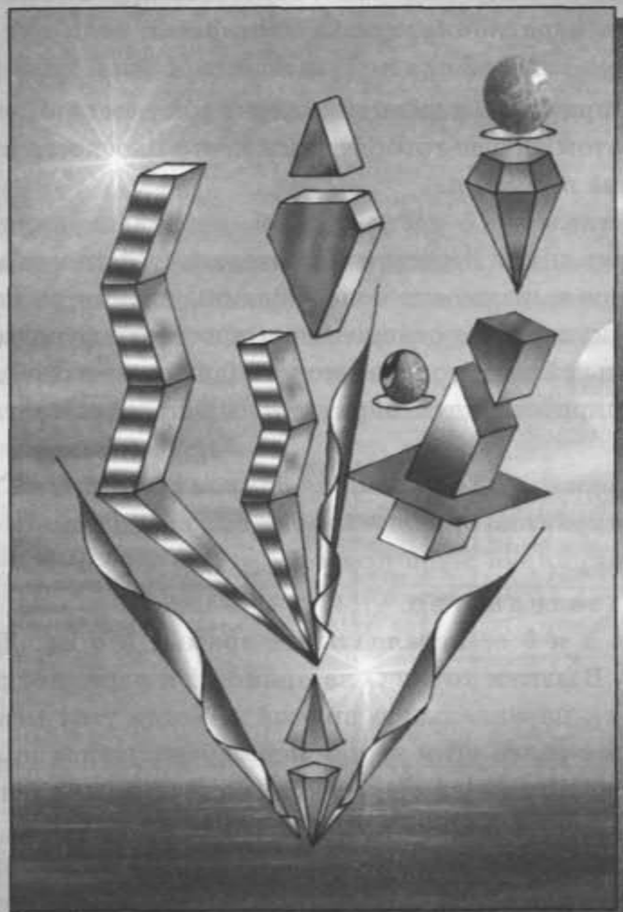
**40.** Точка $O$ делит ребро $A_1D_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в отношении $2:3$ ($A_1O:OD_1 = 3:2$). Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку $O$ и параллельной плоскости $AB_1C$. Вычислите площадь этого сечения, если площадь треугольника $AB_1C$ равна 50 см$^2$.

**41.** В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки $O$, $P$ и $K$ лежат на ребрах $B_1C_1$, $DC$ и $AA_1$ соответственно (рис. 144). Выполните изображение параллелепипеда в тетради и постройте сечение параллелепипеда плоскостью $OPK$.

**42.** Точки $O$, $E$ и $K$ — середины ребер $AD$, $CC_1$ и $A_1B_1$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью $OEK$.

# ГЛАВА 3

## Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикулярность плоскостей



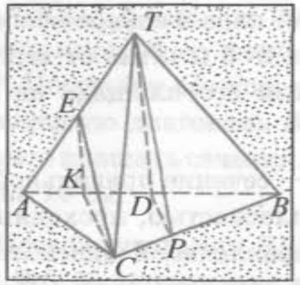



Рис. 143

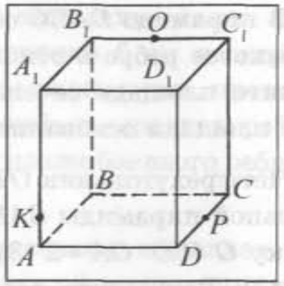



Рис. 144

Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $SOEK$, если площадь боковой поверхности пирамиды $SABC$ равна $Q$.

**38.** Площадь сечения пирамиды плоскостью $\alpha$, проходящей через точку на боковом ребре и параллельной основе, равна 5 см$^2$. В каком отношении плоскость $\alpha$ делит боковое ребро пирамиды, если площадь основания равна 45 см$^2$?

**39.** Длина стороны основания правильной треугольной пирамиды равна $a$, а длина бокового ребра — $b$. Через точку, делящую боковое ребро в отношении $1:3$ (считая от вершины пирамиды), проведено сечение, параллельное боковой грани. Найдите площадь этого сечения.

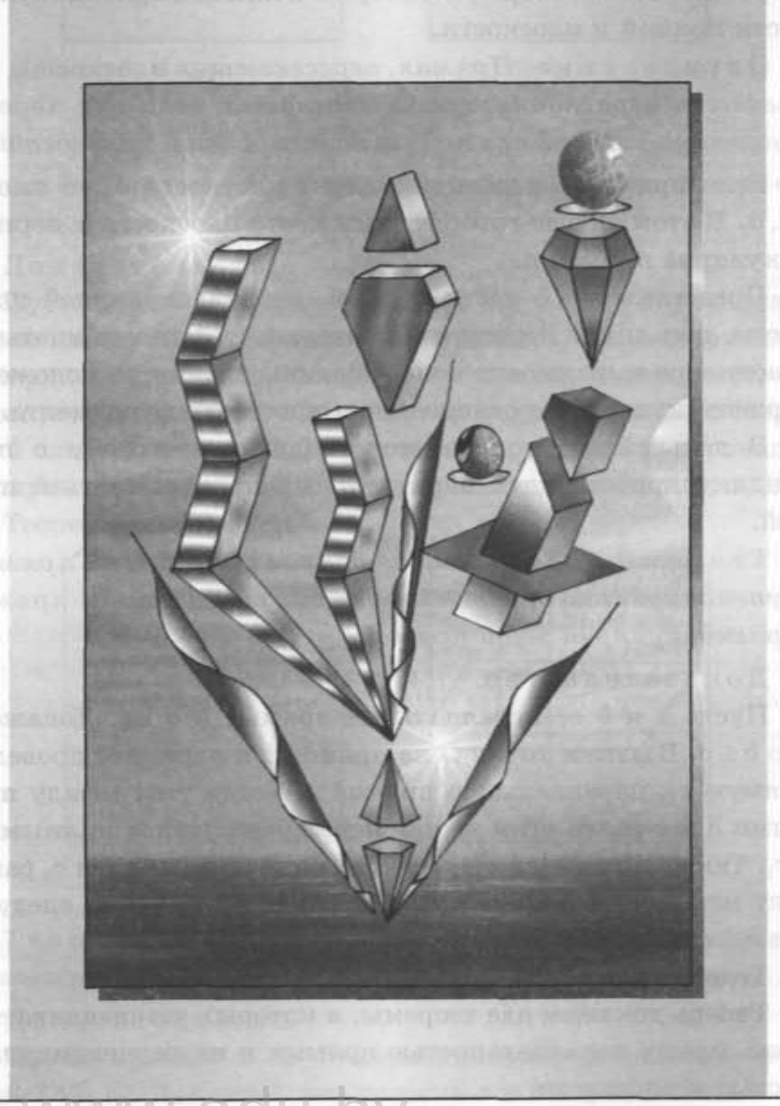
**40.** Точка $O$ делит ребро $A_1D_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в отношении $2:3$ ($A_1O:OD_1 = 3:2$). Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку $O$ и параллельной плоскости $AB_1C$. Вычислите площадь этого сечения, если площадь треугольника $AB_1C$ равна 50 см$^2$.

**41.** В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки $O$, $P$ и $K$ лежат на ребрах $B_1C_1$, $DC$ и $AA_1$ соответственно (рис. 144). Выполните изображение параллелепипеда в тетради и постройте сечение параллелепипеда плоскостью $OPK$.

**42.** Точки $O$, $E$ и $K$ — середины ребер $AD$, $CC_1$ и $A_1B_1$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью $OEK$.

# ГЛАВА 3

## Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикулярность плоскостей



## § 1. Перпендикулярность прямой и плоскости

**1. Прямая, перпендикулярная плоскости.** В предыдущей главе было определено понятие перпендикулярности прямых в пространстве. Теперь рассмотрим понятие перпендикулярности прямой и плоскости.

Определение. *Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой, лежащей в этой плоскости.*

Если прямая $a$ перпендикулярна плоскости $\alpha$, то пишут $a \perp \alpha$. В этом случае говорят также, что плоскость $\alpha$ перпендикулярна прямой $a$.

Представление о части прямой, перпендикулярной плоскости, дает линия пересечения поверхностей стен комнаты по отношению к плоскости пола, колонны здания расположены перпендикулярно по отношению к плоскости фундамента.

В дальнейшем понадобится следующая теорема о перпендикулярности двух параллельных прямых третьей прямой.

Теорема 1. *Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна этой прямой.*

Доказательство.

Пусть $a$ и $b$ — параллельные прямые и $a \perp c$. Докажем, что $b \perp c$. Возьмем точку $O$ на прямой $b$ и через нее проведем прямую $c_1$, параллельную прямой $c$. Тогда угол между прямыми $b$ и $c$ равен углу между пересекающимися прямыми $b$ и $c_1$. Так как $b \parallel a$ и $c \parallel c_1$, то угол между прямыми $b$ и $c_1$ равен углу между прямыми $a$ и $c$, т. е. равен 90°. Отсюда следует, что $b \perp c$ (рис. 145, *а*, *б*).

Теорема доказана.

Теперь докажем две теоремы, в которых устанавливается связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.



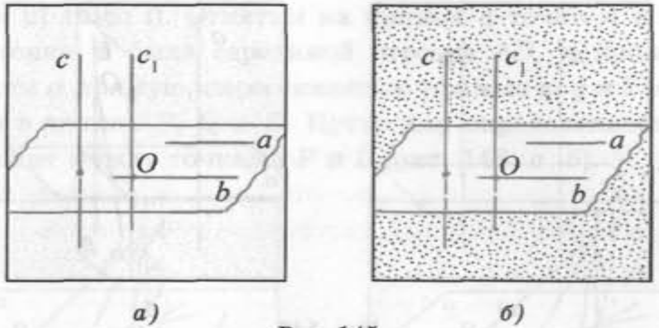



Рис. 145

Теорема 2. *Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.*

Доказательство.

Пусть прямые $a$ и $a_1$ параллельны и прямая $a$ перпендикулярна плоскости $\alpha$. Докажем, что прямая $a_1$ также перпендикулярна плоскости $\alpha$. Рассмотрим произвольную прямую $l$ в плоскости $\alpha$ (рис. 146, *а*, *б*). Так как $a \perp \alpha$, то $a \perp l$. Из теоремы 1 следует, что $a_1 \perp l$. Таким образом, прямая $a_1$ перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости $\alpha$, т. е. $a_1 \perp \alpha$. Теорема доказана.

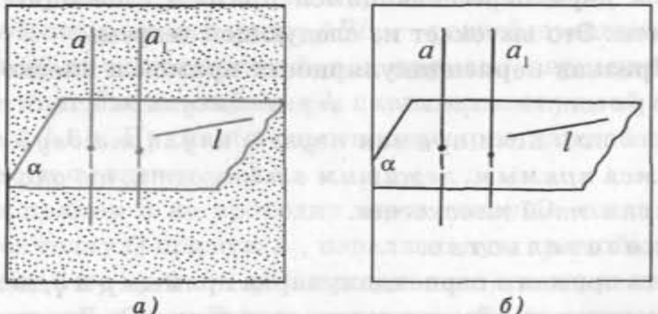
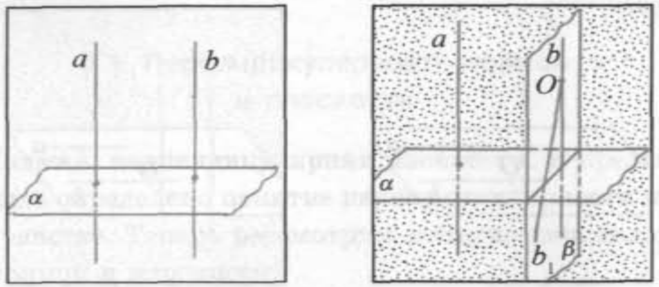



Рис. 146

Теорема 3. *Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны.*

Доказательство.

Пусть прямые $a$ и $b$ перпендикулярны плоскости $\alpha$ (рис. 147, *а*). Докажем, что прямые $a$ и $b$ параллельны.




а) б)

Рис. 147

Допустим, что прямая $b$ не параллельна прямой $a$. Через произвольную точку $O$ прямой $b$ проведем прямую $b_1$, параллельную прямой $a$. По теореме 2 прямая $b_1$ перпендикулярна плоскости $\alpha$. Рассмотрим плоскость $\beta$, в которой лежат прямые $b$ и $b_1$. Пусть $l$ — прямая, по которой пересекаются плоскости $\alpha$ и $\beta$ (рис. 147, *б*). Тогда в плоскости $\beta$ через точку $O$ проходят две прямые $b$ и $b_1$, перпендикулярные прямой $l$. Но это невозможно, следовательно, наше предположение неверно и $a \parallel b$.

Теорема доказана.

Для установления факта перпендикулярности прямой и плоскости достаточно доказать перпендикулярность прямой только к двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости. Это вытекает из следующей теоремы.

**2. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.**

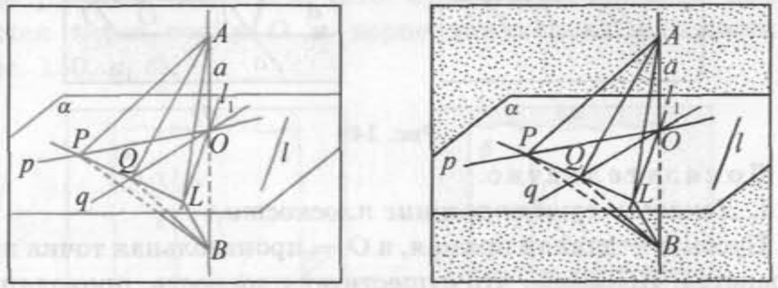
Т е о р е м а 4 (*признак перпендикулярности прямой и плоскости*). ***Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.***

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть прямая $a$ перпендикулярна прямым $p$ и $q$, лежащим в плоскости $\alpha$ и пересекающимся в точке $O$. Докажем, что прямая $a$ перпендикулярна плоскости $\alpha$. Для этого нужно доказать, что прямая $a$ перпендикулярна произвольной прямой $l$ плоскости $\alpha$.

Рассмотрим случай, когда прямая $a$ проходит через точку $O$. Проведем через точку $O$ прямую $l_1$, параллельную прямой $l$ (если прямая $l$ проходит через точку $O$, то в качестве $l_1$ возьмем прямую $l$). Отметим на прямой $a$ точки $A$ и $B$ так, чтобы точка $O$ была серединой отрезка $AB$, и проведем в плоскости $\alpha$ прямую, пересекающую прямые $p$, $q$ и $l$ соответственно в точках $P$, $Q$ и $L$. Пусть для определенности точка $Q$ лежит между точками $P$ и $L$ (рис. 148, *а*, *б*).






а) б)

Рис. 148

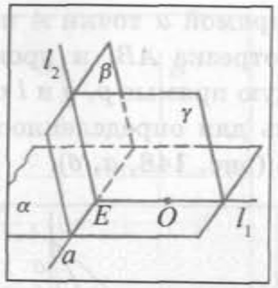
Заметим, что $AP = BP$ и $AQ = BQ$, так как $\triangle AOP = \triangle BOP$ и $\triangle AOQ = \triangle BOQ$ (указанные треугольники равны по двум катетам). Следовательно, $\triangle APQ = \triangle BPQ$ (так как $AP = BP$, $AQ = BQ$, $PQ$ — общая сторона). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle APQ = \angle BPQ$.

Треугольники $APL$ и $BPL$ равны (так как $AP = BP$, $PL$ — общая сторона, а $\angle APL = \angle BPL$), следовательно, $AL = BL$. Таким образом, треугольник $ABL$ — равнобедренный, и его медиана $OL$ является высотой, т. е. прямая $l_1$ перпендикулярна прямой $a$. Так как прямая $l_1$ параллельна прямой $l$, то по теореме 1 $l \perp a$. Прямая $a$ перпендикулярна каждой прямой $l$ плоскости $\alpha$, значит, $a \perp \alpha$.

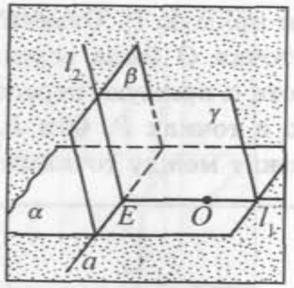
Если прямая $a$ не проходит через точку $O$, тогда проведем через точку $O$ прямую $a_1$, параллельную прямой $a$. Тогда по теореме 1 $a_1 \perp p$ и $a_1 \perp q$. Следовательно, по доказанному в первом случае $a_1 \perp \alpha$. Теперь по теореме 2 прямая $a$ перпендикулярна плоскости $\alpha$.

Теорема доказана.

Т е о р е м а 5 (*о плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной прямой*). ***Через любую точку пространства проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.***




а)




б)

Рис. 149

Доказательство.

I. *Докажем существование плоскости.*

Пусть $a$ — данная прямая, а $O$ — произвольная точка пространства. Докажем, что существует плоскость, проходящая через точку $O$ и перпендикулярная прямой $a$.

1) Рассмотрим плоскость $\alpha$, проходящую через прямую $a$ и точку $O$, и плоскость $\beta$, проходящую через прямую $a$ (рис. 149, *а*, *б*).

2) В плоскости $\alpha$ через точку $O$ проведем прямую $l_1$, перпендикулярную прямой $a$. Пусть точка $E$ — точка пересечения прямых $a$ и $l_1$.

3) Через точку $E$ в плоскости $\beta$ проведем прямую $l_2$, перпендикулярную прямой $a$.

4) Плоскость $\gamma$, проходящая через прямые $l_1$ и $l_2$, является искомой. Действительно, прямая $a$ перпендикулярна двум пересекающимся прямым $l_1$ и $l_2$ плоскости $\gamma$, следовательно, она перпендикулярна плоскости $\gamma$.

II. *Докажем единственность.*

Допустим, что через точку $O$ проходит еще одна плоскость $\gamma_1$, перпендикулярная прямой $a$. Пусть плоскость $\gamma_1$ пересекает плоскость $\alpha$ по прямой $p_1$. Тогда $a \perp l_1$ и $a \perp p_1$. Следовательно, в плоскости $\alpha$ через точку $O$ проходят две прямые $l_1$ и $p_1$, перпендикулярные прямой $a$. Как известно из планиметрии, этого быть не может. Таким образом, наше предположение неверно, и плоскость $\gamma$ — единственная.

Теорема доказана.

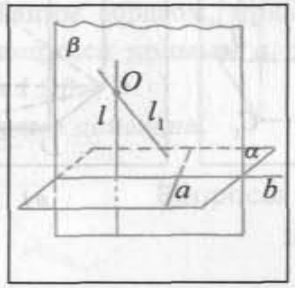
Теорема 6 (*о прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной плоскости*). *Через любую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.*



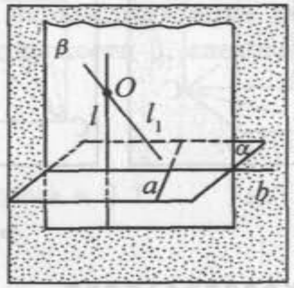
Доказательство.

I. *Докажем существование прямой.*

Пусть дана плоскость $\alpha$ и $O$ — произвольная точка пространства. Докажем, что существует прямая, проходящая через точку $O$ и перпендикулярная плоскости $\alpha$ (рис. 150, *а*, *б*).




а)




б)

Рис. 150

1) Проведем в плоскости $\alpha$ некоторую прямую $a$ и рассмотрим плоскость $\beta$, проходящую через точку $O$ и перпендикулярную прямой $a$.

2) Обозначим буквой $b$ прямую, по которой пересекаются плоскости $\alpha$ и $\beta$.

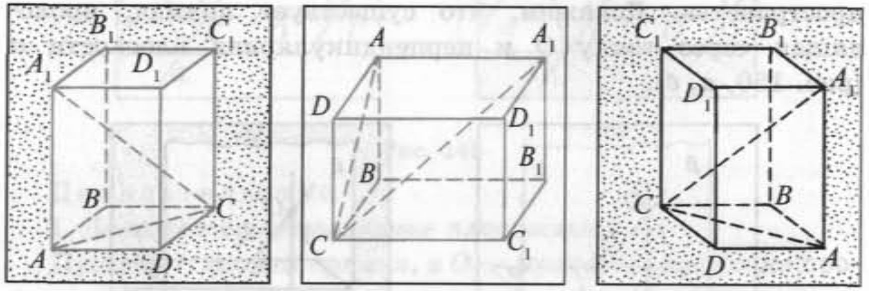
3) В плоскости $\beta$ через точку $O$ проведем прямую $l$, перпендикулярную прямой $b$. Прямая $l$ — искомая прямая. Действительно, прямая $l$ перпендикулярна двум пересекающимся прямым $a$ и $b$ плоскости $\alpha$ ($l \perp b$ по построению и $l \perp a$, так как $\beta \perp a$), следовательно, она перпендикулярна плоскости $\alpha$ (см. рис. 150, *а*, *б*).

II. *Докажем единственность.*

Предположим, что через точку $O$ проходит еще одна прямая $l_1$, перпендикулярная плоскости $\alpha$. Тогда по теореме 3 прямые $l$ и $l_1$ параллельны, что невозможно, так как прямые $l$ и $l_1$ пересекаются в точке $O$. Таким образом, наше предположение неверно, и через точку $O$ проходит одна прямая, перпендикулярная плоскости $\alpha$.

Теорема доказана.

**Теорема 7** *(о свойстве диагонали прямоугольного параллелепипеда). **Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин трех его ребер, имеющих общую вершину.***




а) б) в)

Рис. 151

**Доказательство.**

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед (все его грани — прямоугольники). Докажем, что $A_1C^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$.

Из условия следует, что $AA_1 \perp AB$ и $AA_1 \perp AD$. Значит, по признаку перпендикулярности прямой к плоскости прямая $AA_1$ перпендикулярна плоскости, в которой лежит грань $ABCD$. Отсюда следует, что $AA_1 \perp AC$. В прямоугольном треугольнике $A_1AC$ по теореме Пифагора $A_1C^2 = AC^2 + AA_1^2$. Кроме того, $AC^2 = AB^2 + AD^2$ (так как $AC$ — диагональ прямоугольника $ABCD$). Следовательно, $A_1C^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$ (рис. 151, *а*, *б*, *в*).

**Следствие.** *Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.*

*Задача.* Докажите, что если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то эта прямая перпендикулярна и другой плоскости.

**Доказательство.**

Пусть плоскости $\alpha$ и $\beta$ параллельны, а прямая $l \perp \alpha$. Докажем, что $l \perp \beta$.



1) Рассмотрим пересекающиеся прямые $a$ и $b$ в плоскости $\alpha$.

2) Через произвольную точку в плоскости $\beta$ проведем прямые $a_1$ и $b_1$, параллельные $a$ и $b$ соответственно. Эти прямые лежат в плоскости $\beta$ (глава 2, § 2, задача 2).

3) Прямая $l$ перпендикулярна прямым $a$ и $b$ (так как $l \perp \alpha$), следовательно, она перпендикулярна прямым $a_1$ и $b_1$ (глава 3, § 1, теорема 1).

4) Таким образом, прямая $l$ перпендикулярна двум пересекающимся прямым $a_1$ и $b_1$ плоскости $\beta$, следовательно, прямая $l \perp \beta$.

Теорема доказана.

## Вопросы и задачи к § 1

### I

**1.** Верно ли утверждение, что прямая $a$, перпендикулярная прямой $l$, лежащей в плоскости $\beta$, перпендикулярна плоскости $\beta$?

**2.** Прямая $l$ перпендикулярна двум прямым, лежащим в плоскости $\alpha$. Верно ли утверждение, что прямая $l$ перпендикулярна плоскости $\alpha$?

**3.** Как расположены между собой две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости?

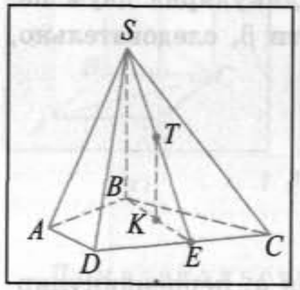
**4.** Верно ли утверждение, что две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны между собой?

**5.** Будут ли параллельны между собой две плоскости, перпендикулярные одной и той же плоскости?

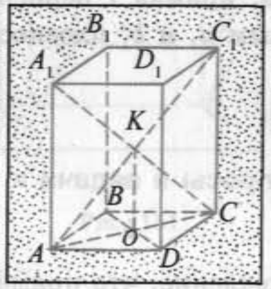
**6.** Докажите, что две плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны между собой.

**7.** $SABCD$ — четырехугольная пирамида, у которой боковое ребро $SB$ перпендикулярно плоскости основания, точка $E$ лежит на ребре $DC$. а) Докажите, что прямая $KT$ перпендикулярна плоскости основания (точки $K$ и $T$ — середины отрезков $BE$ и $SE$ соответственно). б) Чему равна градусная мера угла между прямыми $KT$ и $AD$ (рис. 152, *а*)?

**8.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед. Точка $K$ — точка пересечения его диагоналей, а $O$ — точка пересечения диагоналей основания (рис. 152, *б*). а) Верно ли, что прямая $OK$ перпендикулярна плоскости $ABC$? б) Докажите, что прямые $OK$ и $BC$ перпендикулярны. в) Найдите угол между прямыми $CC_1$ и $BD$.




*а)*




*б)*

Рис. 152

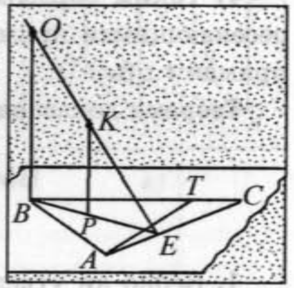



Рис. 153

**9.** Отрезок $MA$ перпендикулярен плоскости треугольника $ABC$, точка $O$ — точка пересечения его медиан. На отрезке $MK$ (точка $K$ — середина отрезка $BC$) взята точка $P$ такая, что $MP : PK = 2 : 1$. а) Определите угол между прямыми $OP$ и $BC$. б) Верно ли, что прямые $AB$ и $PO$ перпендикулярны?

**10.** Отрезок $OB$ перпендикулярен плоскости треугольника $ABC$, $OK : KE = BP : PE$ (рис. 153). а) Докажите, что прямая $PK$ перпендикулярна плоскости $ABC$. б) Верно ли, что прямые $AT$ и $PK$ перпендикулярны? в) Чему равен угол между прямыми $AC$ и $PK$?

**11.** В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро $SB$ перпендикулярно плоскости основания. Прямая $l$ проходит через точку пересечения медиан грани $SAC$ и перпендикулярна основанию. Постройте точку пересечения прямой $l$ с плоскостью основания.

**12.** $SABC$ — треугольная пирамида, у которой боковое ребро $SB$ перпендикулярно плоскости $ABC$. Прямая $l$ проходит через точку $O$ ($O \in (ABC)$) и перпендикулярна плоскости основания (рис. 154). Перечертите рисунок в тетрадь и постройте точку пересечения прямой $l$ с плоскостью $SAC$.



**13.** Плоскость $ABC$ параллельна плоскости $\alpha$. Через точки $A$, $B$ и $C$ проведены прямые, перпендикулярные плоскости $\alpha$ и пересекающие ее в точках $A_1$, $B_1$ и $C_1$ соответственно. Докажите, что треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ равны.

**14.** Отрезок $AB$ не имеет общих точек с плоскостью $\alpha$. Через точки $A$ и $B$ проведены прямые, перпендикулярные плоскости $\alpha$ и пересекающие ее в точках $A_1$ и $B_1$. Вычислите длину отрезка $A_1B_1$, если $AB = 13$ см, $AA_1 = 12$ см и $BB_1 = 24$ см.

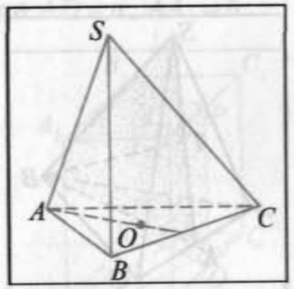



Рис. 154

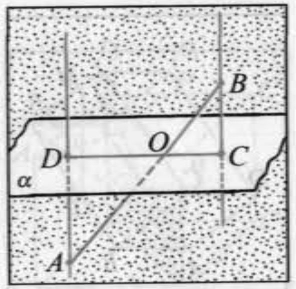



Рис. 155

**15.** Отрезок $AB$ пересекает плоскость $\alpha$ в точке $O$. Прямые $AD$ и $BC$, перпендикулярные этой плоскости, пересекают ее в точках $D$ и $C$ соответственно (рис. 155). а) Верно ли, что прямые $AD$ и $BC$ параллельны? б) Докажите, что точки $D$, $O$ и $C$ лежат на одной прямой, и вычислите длину отрезка $AB$, если $AD = 12$ см, $BC = 4$ см, $OC = 3$ см.

**16.** На прямых $a$ и $b$, перпендикулярных плоскости $\alpha$ и пересекающих ее в точках $A$ и $B$, взяты точки $C$ и $D$ так, что $CA = 9$ см, $DB = 15$ см. Вычислите длину отрезка $CD$, если $AB = 8$ см.

**17.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. Точка $O$ — середина ребра $CC_1$, а точка $M$ лежит на ребре $AA_1$ так, что $AM : AA_1 = 1 : 3$. Вычислите длину отрезка $MO$, если длина диагонали параллелепипеда равна 13 см, а длина диагонали основания — 5 см.

**18.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. Точки $M$ и $P$ принадлежат ребрам $B_1C_1$ и $BB_1$ (рис. 156). а) Докажите, что прямая $BC$ перпендикулярна плоскости, в которой лежит грань $AA_1B_1B$. б) Верно ли, что прямая $MP$ перпендикулярна прямой $AD$? в) Найдите угол между прямыми $B_1C$ и $DC$.

**19.** $SABC$ — треугольная пирамида, у которой $AB \perp SB$, $AB \perp BC$, $SB \perp BC$. а) Докажите, что прямая $BC$ перпендикулярна плоскости $SAB$. б) Верно ли, что медиана $CK$ треугольника $SBC$ перпендикулярна прямой $AB$?

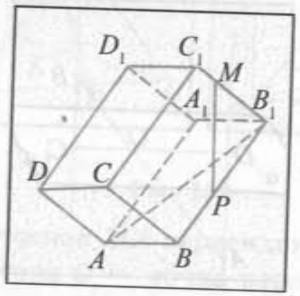



Рис. 156

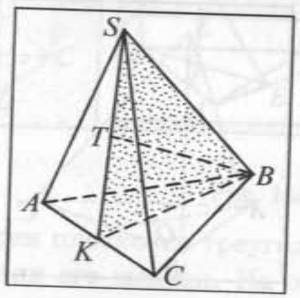



Рис. 157

**20.** $SABC$ — правильная треугольная пирамида, точка $K$ — середина ребра $AC$ (рис. 157). а) Докажите, что прямая $AC$ перпендикулярна плоскости $SKB$. б) Верно ли, что прямые $AC$ и $SB$ перпендикулярны? в) Найдите угол между прямой $AC$ и прямой, на которой лежит медиана $BT$ треугольника $SKB$.

**21.** $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, диагонали основания которой пересекаются в точке $O$. а) Докажите, что прямая $SO$ перпендикулярна плоскости основания данной пирамиды. б) Чему равен угол между прямыми $SO$ и $CD$?

**22.** Точка $O$ — середина ребра $CB$ правильного тетраэдра $SABC$. Постройте сечение данного тетраэдра плоскостью, проходящей через точку $O$ и параллельной прямым $AC$ и $SB$.



Найдите площадь этого сечения, если ребро тетраэдра равно $a$.

**23.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, основание которого — квадрат. Точки $P$, $Q$, $F$ и $T$ являются серединами его ребер (рис. 158). а) Докажите, что прямая $CT$ перпендикулярна плоскости сечения $BB_1PQ$. б) Чему равен угол между прямыми $TC$ и $BP$? в) Верно ли, что прямая $AF$ перпендикулярна сечению $BB_1PQ$?

**24.** Точка $P$ — середина ребра $AD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основание которого — квадрат $ABCD$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку $P$ и перпендикулярной прямой $BD$, если $AD = a$, $AA_1 = b$.

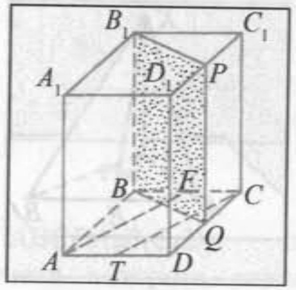



Рис. 158

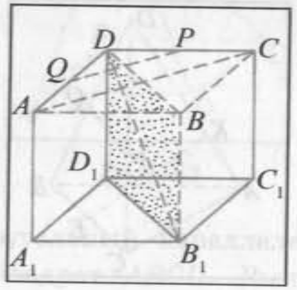



Рис. 159

**25.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, основание которого — квадрат $ABCD$. Точки $P$ и $Q$ — середины ребер $DC$ и $DA$ соответственно (рис. 159). а) Докажите, что плоскость сечения $BDD_1B_1$ перпендикулярна прямой $AC$. б) Почему прямая $B_1D$ перпендикулярна прямой $AC$? в) Верно ли, что прямая $PQ$ перпендикулярна плоскости сечения $BDD_1B_1$?

**26.** Постройте сечение правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостью, перпендикулярной ребру $AB$ и проходящей через середину этого ребра. Вычислите площадь этого сечения, если $AB = 4$ см.

**27.** $ABCD$ — правильный тетраэдр, точки $P$, $Q$ и $E$ — середины его ребер (рис. 160). а) Докажите, что прямые $PQ$ и $AD$

перпендикулярны. б) Верно ли, что прямая $EK$ ($K$ принадлежит ребру $AD$) перпендикулярна прямой $PQ$? в) Найдите угол между прямыми $AE$ и $PQ$.

**28.** Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит прямоугольник $ABCD$. Вычислите длину его бокового ребра, если $AB = 3$ см, $BC = 4$ см и $B_1D = 5\sqrt{2}$ см.

**29.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ $\angle ACB = 90°$, $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, $CE$ — его медиана. Прямая $CK$ перпендикулярна плоскости треугольника $ABC$. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника $KCE$, если $CK = 6$ см (рис. 161).

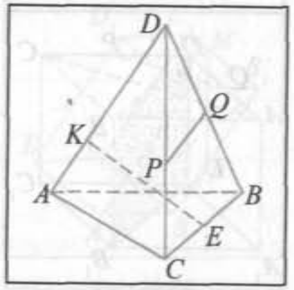



Рис. 160

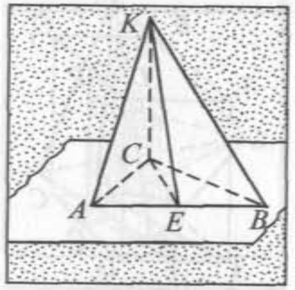



Рис. 161

**30.** В треугольнике $ABC$ отрезок $BT$ является его высотой. Отрезок $BF$ перпендикулярен прямым $AB$ и $BC$. Найдите угол между прямыми $FT$ и $PK$, где точки $P$ и $K$ — середины отрезков $AB$ и $BC$ соответственно.

**31.** Отрезок $BK$ перпендикулярен плоскости треугольника $ABC$. Вычислите длину этого отрезка, если $AK = 13$ см, $KC = 15$ см, а $BC - AB = 4$ см.

**32.** Боковое ребро $SB$ треугольной пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости ее основания. Вычислите длину этого ребра, если $AB = 9$ см, $BC = 16$ см и $SC : SA = 4 : 3$.

**33.** Докажите, что если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.



**34.** Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат $ABCD$. Точка $K$ лежит на отрезке $AC$ так, что $AK : KC = 1 : 3$. Вычислите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку $K$ перпендикулярно прямой $AC$, если $AD = 4$ см, $AC_1 = 4\sqrt{6}$ см.

**35.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 162). а) Верно ли, что прямые $BD_1$ и $AC$ перпендикулярны? б) Докажите, что прямые $BD_1$ и $AB_1$ перпендикулярны. в) Докажите, что прямая $BD_1$ перпендикулярна плоскости $AB_1C$.

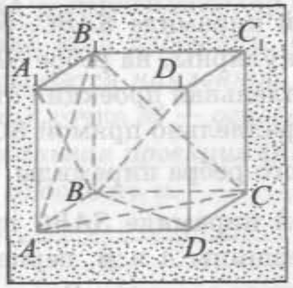



Рис. 162

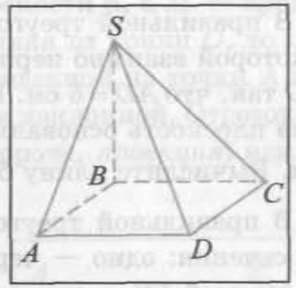



Рис. 163

**36.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, основанием которого служит квадрат $ABCD$. Вычислите площадь боковой поверхности четырехугольной пирамиды $B_1ABCD$, если $AB = 2$ см, $AC_1 = 2\sqrt{6}$ см.

**37.** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковые ребра взаимно перпендикулярны ($SC \perp SA$, $SC \perp SB$, $SA \perp SB$). Через точку $O$, взятую на ребре $AC$, построено сечение пирамиды, перпендикулярное прямой $SC$. Вычислите длину бокового ребра пирамиды, если площадь сечения равна 32 см$^2$, а $SO = 10$ см.

**38.** Боковое ребро $SB$ четырехугольной пирамиды $SABCD$, в основании которой — квадрат $ABCD$, перпендикулярно плоскости основания (рис. 163). а) Докажите, что прямая $AD$ перпендикулярна плоскости $SBA$. б) Верно ли, что прямые $SC$ и $CD$ перпендикулярны? в) Вычислите длину ребра $SB$, если площадь боковой поверхности пирамиды равна 27 см$^2$, а $CD = 3$ см.

**39.** В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 3$ см, $AD = 4$ см. К плоскости прямоугольника проведены перпендикулярные отрезки $BB_1$ и $CC_1$ так, что отрезок $B_1C_1$ не пересекает плоскость, в которой лежит прямоугольник. Вычислите длину отрезка $B_1C_1$, если $AC_1 = \sqrt{41}$ см, $B_1D = \sqrt{74}$ см.

II

**40.** $SABC$ — правильная треугольная пирамида. Точка $O$ — точка пересечения медиан треугольника $ABC$. Докажите, что прямая $SO$ перпендикулярна плоскости $ABC$.

**41.** В правильной треугольной пирамиде $SABC$, боковые ребра которой взаимно перпендикулярны, на ребре $SB$ взята точка $D$ так, что $AD = 5$ см. Параллельная проекция этого отрезка на плоскость основания параллельно прямой $SC$ равна $\sqrt{26}$ см. Вычислите длину бокового ребра пирамиды.

**42.** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ проведены два сечения: одно — через вершины $A$ и $B$, перпендикулярное прямой $SC$, а другое — через вершину $B$ и точку $E$, делящую ребро $AC$ на отрезки $AE = 8$ см и $EC = 7$ см, параллельное прямой $SC$. Вычислите длину отрезка, по которому пересекаются эти сечения, если $SA = 12$ см.

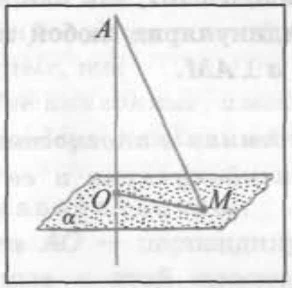
**43.** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ из вершины $C$ и из точки $D$, делящей ребро $AC$ на отрезки $AD = 15$ см и $DC = 10$ см, проведены перпендикуляры к грани $SAB$. Вычислите длину каждого перпендикуляра, если расстояние между их основаниями равно 6 см.

**44.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середину ребра $BB_1$ перпендикулярно прямой $BD_1$. Найдите площадь этого сечения, если длина ребра куба равна $a$.

**45.** Через центр основания правильной треугольной пирамиды параллельно двум ее непересекающимся ребрам проведена плоскость. Найдите площадь получившегося сечения, если боковое ребро пирамиды равно $a$, а сторона основания $b$.

## § 2. Перпендикуляр и наклонная. Расстояние от точки до плоскости

**1. Перпендикуляр и наклонная.** Пусть точка $A$ не лежит на плоскости $\alpha$. Проведем через точку $A$ прямую, перпендикулярную плоскости $\alpha$, и обозначим буквой $O$ точку пересечения этой прямой с плоскостью $\alpha$ (рис. 164, *а*). *Перпендикуляром, проведенным из точки $A$ к плоскости $\alpha$*, называется отрезок $AO$, точка $O$ называется *основанием перпендикуляра*. Если $AO$ — перпендикуляр к плоскости $\alpha$, а $M$ — произвольная точка этой плоскости, отличная от точки $O$, то отрезок $AM$ называется *наклонной*, проведенной из точки $A$ к плоскости $\alpha$, а точка $M$ — *основанием* наклонной. Отрезок $OM$ — *ортогональная проекция* (или, короче, *проекция*) наклонной $AM$ на плоскость $\alpha$.



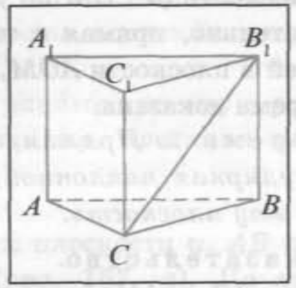
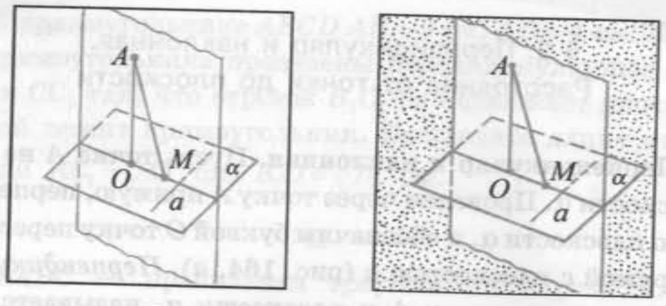




Рис. 164

Например, если $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, то перпендикуляр, проведенный из точки $B_1$ к плоскости основания $ABC$ есть ребро $B_1B$, отрезок $CB$ — проекция наклонной $B_1C$ на плоскость $ABC$ (рис. 164, *б*).

**2. Теорема о трех перпендикулярах.** Докажем теорему, которая играет важную роль при решении многих задач.

Теорема 1 (*о трех перпендикулярах*). *Прямая, проведенная в плоскости и перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной.*



а) б)

Рис. 165

Доказательство.

Пусть $AO$ и $AM$ — перпендикуляр и наклонная к плоскости $\alpha$, $a$ — прямая, проведенная в плоскости $\alpha$ перпендикулярно проекции $OM$ (рис. 165, *а*, *б*). Докажем, что $a \perp AM$.

Прямая $a$ перпендикулярна плоскости $OAM$, так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым $OA$ и $OM$ этой плоскости ($a \perp OM$ по условию, $a \perp AO$, так как $AO \perp \alpha$). Следовательно, прямая $a$ перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости $AOM$, т. е. $a \perp AM$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Прямая, проведенная в плоскости и перпендикулярная наклонной, перпендикулярна и ее проекции на эту плоскость.*

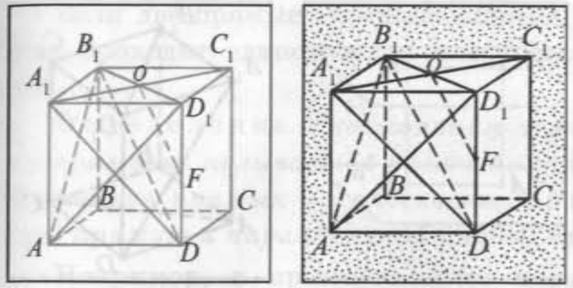
Доказательство.

Пусть $AO$ и $AM$ — перпендикуляр и наклонная, проведенные из точки $A$ к плоскости $\alpha$, прямая $a$ лежит в плоскости $\alpha$ и перпендикулярна наклонной $AM$ (см. рис. 165, *а*, *б*). Докажем, что прямая $a$ перпендикулярна проекции $OM$. Прямая $a$ перпендикулярна плоскости $OAM$, так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым $OA$ и $AM$ этой плоскости ($a \perp AM$ по условию, $a \perp OA$, так как $OA \perp \alpha$). Отсюда следует, что прямая $a$ перпендикулярна каждой прямой, лежащей в плоскости $AOM$, в частности $a \perp OM$.

Теорема доказана.

Задача 1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, точка $O$ — точка пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$, а $F$ — середина ребра $DD_1$. Докажите, что $OF \perp AD_1$.





а) б)

Рис. 166

Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $DF = FD_1$, $O = A_1C_1 \cap B_1D_1$.

Доказать:
$OF \perp AD_1$.

Доказательство.

1) $A_1D$ — проекция $B_1D$ на плоскость $A_1AD$ и $A_1D \perp AD_1$. Следовательно, по теореме о трех перпендикулярах $B_1D \perp AD_1$.

2) $OF \parallel B_1D$ (так как $OF$ — средняя линия треугольника $B_1D_1D$), значит, $OF \perp AD_1$ (рис. 166, *а*, *б*).

Теорема 3. *Если из одной точки, взятой вне плоскости, проведены к этой плоскости перпендикуляр и две наклонные, то:*

1) *две наклонные, имеющие равные проекции, равны;*

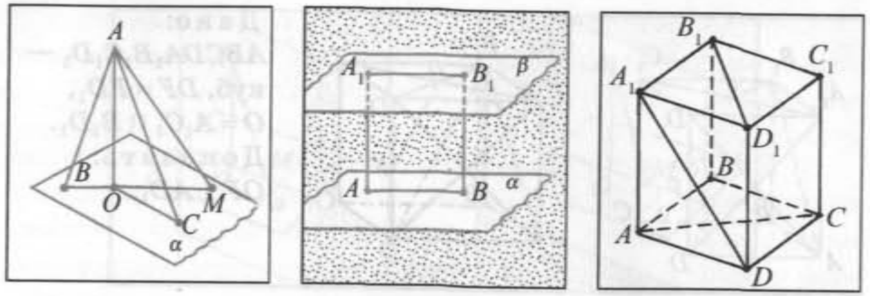
2) *из двух наклонных больше та, проекция которой больше.*

Доказательство.

Пусть $AO$ — перпендикуляр к плоскости $\alpha$, $AB$ и $AC$ — наклонные к этой плоскости (рис. 167, *а*). По условию $AO \perp \alpha$, следовательно, $AO \perp OB$ и $AO \perp OC$. Из прямоугольных треугольников $AOB$ и $AOC$ находим $AB = \sqrt{AO^2 + OB^2}$, $AC = \sqrt{AO^2 + OC^2}$. Отсюда: 1) если $OB = OC$, то $AB = AC$; 2) если $OB < OC$, то $AB < AC$.

Теорема доказана.

Пусть $AO$ и $AM$ — перпендикуляр и наклонная, проведенные из точки $A$ к плоскости $\alpha$ (см. рис. 167, *а*). В прямоугольном треугольнике $AOM$ сторона $AO$ является катетом, а сторона $AM$ — гипотенузой, следовательно, $AO < AM$. Таким образом, перпендикуляр, проведенный из точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к данной плоскости.




а) б) в)

Рис. 167

Таким образом, из всех расстояний от точки $A$ до различных точек плоскости $\alpha$ наименьшим является расстояние до основания $O$ перпендикуляра, проведенного из точки $A$ к плоскости $\alpha$.

Определение. *Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к данной плоскости.*

Пусть $\alpha$ и $\beta$ — параллельные плоскости. Из любых точек $A$ и $B$ плоскости $\alpha$ проведем к плоскости $\beta$ перпендикуляры $AA_1$ и $BB_1$ (рис. 167, *б*). Так как $AA_1 \perp \beta$ и $BB_1 \perp \beta$, то $AA_1 \parallel BB_1$. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны, следовательно, $AA_1 = BB_1$. Отсюда следует, что все точки плоскости $\alpha$ находятся на одном и том же расстоянии от плоскости $\beta$. Аналогично, все точки плоскости $\beta$ находятся на том же расстоянии от плоскости $\alpha$.

Определение. *Расстоянием между параллельными плоскостями называется расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости.*

Аналогично, каждая точка прямой, параллельной некоторой плоскости, находится на одном и том же расстоянии от этой плоскости.

Определение. *Расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью называется расстояние от произвольной точки прямой до плоскости.*

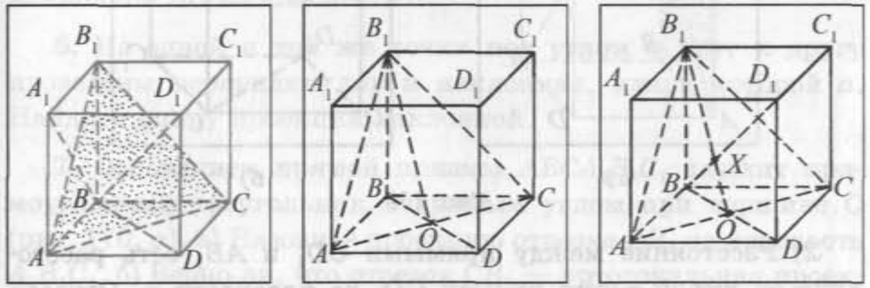


Если две прямые скрещивающиеся, то через каждую из них проходит единственная плоскость, параллельная другой.

Определение. *Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние от одной из скрещивающихся прямых до плоскости, проходящей через другую прямую и параллельной первой прямой.*

Например, в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расстояние между параллельными плоскостями, в которых лежат грани $AA_1B_1B$ и $DD_1C_1C$, равно длине ребра $AD$, так как это ребро перпендикулярно каждой из указанных плоскостей. Расстояние от прямой $A_1D$ до параллельной ей плоскости $BCC_1$ равно длине ребра $DC$ (рис. 167, *в*).

Задача 2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Постройте основание перпендикуляра, проведенного из точки $D_1$ к плоскости $AB_1C$.




а) б) в)

Рис. 168

**Решение.**

1) Заметим, что $A_1B$ — проекция $D_1B$ на плоскость грани $AA_1B_1B$ и $AB_1 \perp A_1B$, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах $AB_1 \perp D_1B$. Аналогично, $DB$ — проекция $D_1B$ на плоскость грани $ABCD$ и $DB \perp AC$, значит, $AC \perp D_1B$. Таким образом, прямая $D_1B$ перпендикулярна двум пересекающимся прямым $B_1A$ и $AC$ плоскости $AB_1C$, следовательно, прямая $D_1B$ перпендикулярна плоскости $AB_1C$ (рис. 168, *а*).

2) Так как $D_1B \perp (AB_1C)$, то искомое основание перпендикуляра есть точка пересечения прямой $D_1B$ с плоскостью $AB_1C$ (см. рис. 168, *а*).

3) Строим точку $O = AC \cap BD$ (рис. 168, *б*).

4) Точка $X = D_1B \cap B_1O$ — искомое основание перпендикуляра (точка $X$ лежит в плоскости $AB_1C$, так как она лежит на прямой $B_1O$) (рис. 168, *в*).

Задача 3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите расстояние между прямыми $AB_1$ и $CD_1$, если длина ребра куба равна $a$.

Решение.

1) Рассмотрим плоскость, проходящую через прямую $AB_1$ параллельно прямой $CD_1$. Такой плоскостью является плоскость $\alpha$, в которой лежит грань $AA_1B_1B$ ($A_1B \subset \alpha$, $CD_1 \parallel A_1B$, следовательно, $CD_1 \parallel \alpha$) (рис. 169, *а*, *б*).

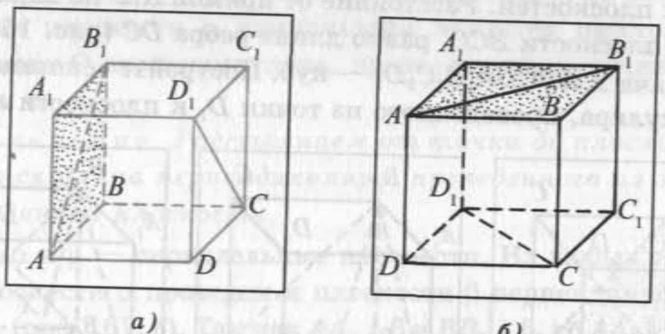



Рис. 169

2) Расстояние между прямыми $CD_1$ и $AB_1$ есть расстояние от любой точки прямой $CD_1$ до плоскости $\alpha$. Отрезок $D_1A_1$ — перпендикуляр, проведенный из точки $D_1$ к плоскости $\alpha$ ($D_1A_1 \perp A_1B_1$, $D_1A_1 \perp AA_1$, значит, $D_1A_1 \perp (AA_1B_1)$), следовательно, его длина $a$ равна расстоянию между прямыми $AB_1$ и $CD_1$.

Ответ: $a$.

## Вопросы и задачи к § 2

### I

1. Прямая $a$ — ортогональная проекция прямой $b$ на плоскость $\alpha$, прямая $l$ лежит в плоскости $\alpha$ и перпендикулярна прямой $a$. Верно ли утверждение, что прямая $l$ перпендикулярна прямой $b$?



2. Прямая $p$ лежит в плоскости $\beta$ и перпендикулярна прямой $b$. Каково взаимное расположение прямой $p$ и ортогональной проекции прямой $b$ на плоскость $\beta$?

3. Точка $P$ лежит на прямой $l$, проходящей через центр окружности и перпендикулярной плоскости, в которой эта окружность лежит. Точки $A$ и $B$ лежат на данной окружности. Верно ли, что отрезки $PA$ и $PB$ равны между собой?

4. Прямые $a$ и $b$ — скрещивающиеся. Плоскость $\alpha$ проходит через прямую $b$ и параллельна прямой $a$, точка $O$ — произвольная точка прямой $a$, $OF$ — перпендикуляр, проведенный из точки $O$ к плоскости $\alpha$. Верно ли, что расстояние между прямыми $a$ и $b$ равно длине отрезка $OF$?

5. Из точки $A$ проведены к плоскости $\alpha$ перпендикуляр $AO = 4$ см и наклонная $AC = 7$ см. Вычислите длину проекции наклонной $AC$ на плоскость $\alpha$.

6. Из одной и той же точки под углом $\varphi$ друг к другу проведены перпендикуляр и наклонная, длина которой $a$. Найдите длину проекции наклонной.

7. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине $C$ (рис. 170, *а*). а) Назовите проекцию отрезка $CB_1$ на плоскость $A_1B_1C_1$. б) Верно ли, что отрезок $CB_1$ — ортогональная проекция отрезка $AB_1$ на плоскость грани $CC_1B_1B$?

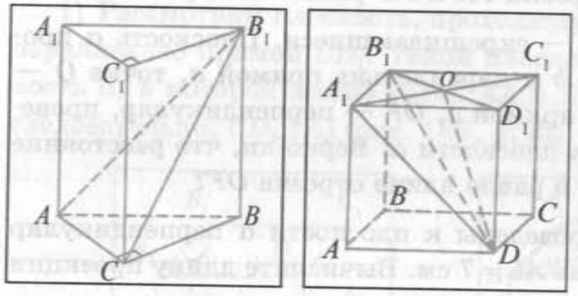
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 170, *б*). а) Верно ли, что проекцией диагонали $B_1D$ на плоскость грани $AA_1D_1D$ является отрезок $A_1D$? б) Найдите длину проекции отрезка $A_1D$ на плоскость $BDD_1$, если длина ребра куба равна $a$.

9. Отрезок $SO$ — перпендикуляр, проведенный из точки $S$ к плоскости, в которой лежит треугольник $ABC$. Известно, что $SA = SB = SC$. Докажите, что точка $O$ есть центр окружности, описанной около треугольника $ABC$.

10. В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро $SA$ перпендикулярно плоскости основания, отрезок $AF$ — высота треугольника $ABC$. Докажите, что $SF$ есть высота треугольника $SBC$.

**11.** Прямая $OB$ перпендикулярна плоскости квадрата $ABCD$. Вычислите площадь треугольника $OAD$, если $OB = 8$ см, $AB = 6$ см.

**12.** Длина бокового ребра правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна 8 см. Вычислите расстояние от вершины $S$ до плоскости основания $ABC$, если $AB = 12$ см.




а) б)

Рис. 170

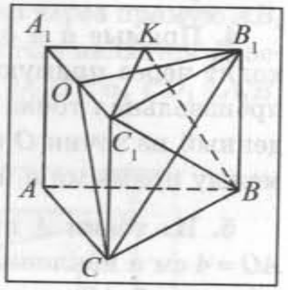



Рис. 171

**13.** $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, точки $K$, $O$ — середины ребер $A_1B_1$ и $A_1C_1$ соответственно (рис. 171). а) Верно ли, что $CO$ — проекция $CB_1$ на плоскость грани $AA_1C_1C$? б) Вычислите площадь треугольника $BC_1K$, если $BC = 6$ см, $AA_1 = \sqrt{15}$ см.

**14.** Основание треугольной пирамиды $SABC$ — прямоугольный треугольник $ABC$, в котором $\angle ACB = 90°$, $\angle CAB = 30°$. Вычислите длину высоты грани $ASB$, проведенной из вершины $S$, если длина бокового ребра $SC$, перпендикулярного плоскости основания, равна 4 см, а $AC = 6$ см.

**15.** Через вершину $A$ прямоугольного треугольника $ABC$ ($\angle ACB = 90°$) проведена прямая $AO$, перпендикулярная плоскости треугольника. Вычислите площадь треугольника $BCO$, если $BC = 2$ см, $CO = 2\sqrt{3}$ см.

**16.** Из точки $O$ проведен перпендикуляр $OA$ к плоскости прямоугольника $ABCD$. Найдите расстояние от точки $O$ до плоскости данного прямоугольника, если $AD = b$, $DC = a$, а площадь треугольника $ODC$ равна $S$.



**17.** Основание треугольной пирамиды $SABC$ — равнобедренный треугольник $ABC$, а боковое ребро $SA$ перпендикулярно плоскости основания. Вычислите площадь грани $SBC$, если $AB = AC = 10$ см, $BC = 12$ см, $AS = 24$ см.

**18.** Боковое ребро $SA$ четырехугольной пирамиды $SABCD$, основание которой — прямоугольник $ABCD$, перпендикулярно плоскости основания. Вычислите длину ребра $SA$, если $SD = 12$ см, $SC = 18$ см, $SB = 14$ см.

**19.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ $AC = BC = 2$ см, $\angle ABC = 30°$. Прямая $OB$ перпендикулярна плоскости данного треугольника. Вычислите расстояние от точки $O$ до прямой $AC$ и расстояние от точки $B$ до плоскости $AOC$, если $OB = 1$ см.

**20.** Через вершину $A$ квадрата $ABCD$ проведена прямая $AO$, перпендикулярная его плоскости. Вычислите расстояния от точки $O$ до прямых $DB$, $BC$ и $DC$, если $OA = 16$ см, $AB = 8$ см.

**21.** Основание треугольной пирамиды $SABC$ — равнобедренный прямоугольный треугольник $ABC$ ($\angle ACB = 90°$). Боковое ребро $SC$ перпендикулярно плоскости основания. Вычислите боковую поверхность пирамиды, если $AC = 4$ см, $SC = 2$ см.

**22.** Катет прямоугольного треугольника $ABC$ равен $a$, а угол, прилежащий к этому катету, равен $\alpha$. Через вершину прямого угла $C$ проведена прямая $CD$, перпендикулярная плоскости этого треугольника. Найдите площадь треугольника $DAB$, если $DC = b$.

**23.** Прямая $OS$ перпендикулярна плоскости ромба $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке $O$. Докажите, что расстояния от точки $S$ до прямых, содержащих стороны ромба, равны, и найдите это расстояние, если $SO = a\sqrt{2}$, $AC = 2a$, $BD = a$.

**24.** Основание четырехугольной пирамиды $OABCD$ — ромб $ABCD$, у которого $\angle ABC = 60°$, $AB = a$. Боковое ребро $OA$ пирамиды перпендикулярно плоскости основания. Найдите длину ребра $OA$ и расстояние от точки $A$ до плоскости $ODC$, если площадь грани $ODC$ равна $S$.

II

**25.** Через вершину $B$ тупого угла параллелограмма $ABCD$ проведена прямая $BM$, перпендикулярная его плоскости. Вычислите длины сторон параллелограмма, если $AM = 3\sqrt{5}$ см, $MD = MC = 5$ см, $AC = 2\sqrt{22}$ см.

**26.** Из точки $A$ к плоскости $\alpha$ проведены перпендикуляр $AB$ и наклонные $AC$ и $AD$, проекции которых образуют между собой прямой угол. Вычислите длину высоты $CK$ треугольника $ACD$, если $AB = 15$ см, $BC = 16$ см, $BD = 20$ см.

**27.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вычислите расстояние между прямыми $B_1D$ и $D_1C$, если длина ребра куба равна 2 см.

**28.** Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке $O$, а прямая $MO$ перпендикулярна плоскости данного параллелограмма. Вычислите длины высот параллелограмма, если длины его сторон равны 20 см и 50 см, а расстояния от точки $M$ до сторон параллелограмма равны 17 см и 25 см.

**29.** Плоскость $\alpha$ проходит через вершину $A$ треугольника $ABC$ параллельно прямой $BC$. Отрезки $BB_1$ и $CC_1$ — перпендикуляры плоскости $\alpha$. Вычислите площадь треугольника $ABC$, если $AB_1 = \sqrt{2}$ см, $AC_1 = \sqrt{3}$ см, $B_1C_1 = 5$ см, а расстояние от прямой $BC$ до плоскости $\alpha$ равно 3 см.

**30.** В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро $SB$ перпендикулярно плоскости основания пирамиды. Вычислите длину высоты $SD$ треугольника $SAC$, если $AB = 10$ см, $BC = 17$ см, $AC = 21$ см, $SB = 15$ см.

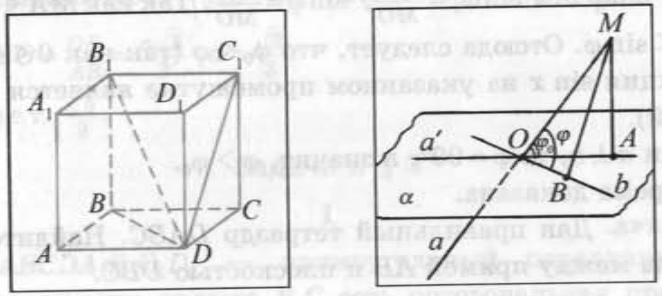
**31.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ основание $AB = 6$ см, а боковая сторона $BC = 5$ см. Отрезок $OK$ перпендикулярен плоскости треугольника (где точка $O$ — центр окружности, вписанной в данный треугольник). Вычислите высоту треугольника $AKB$, проведенную из вершины $K$, если $OK = 2$ см.

**32.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ основание $AC = 6$ см, а высота $BD = 9$ см. Точка $M$ равноудалена от всех вершин данного треугольника и находится на расстоянии 3 см от плоскости, в которой он лежит. Вычислите расстояние от точки $M$ до вершины $C$ треугольника.

## § 3. Угол между прямой и плоскостью

**1. Ортогональная проекция прямой.** Пусть в пространстве даны плоскость $\alpha$ и прямая $a$. *Ортогональной проекцией* прямой $a$ на плоскость $\alpha$ называется проекция этой прямой на плоскость $\alpha$ в случае, если прямая, определяющая направление проектирования, перпендикулярна плоскости $\alpha$.

Например, если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, тогда ортогональной проекцией прямой $B_1D$ на плоскость грани $DCC_1D_1$ является прямая $DC_1$, а ортогональная проекция этой прямой на плоскость основания куба есть прямая $BD$ (рис. 172, *а*).




*а)* *б)*

Рис. 172

Дадим определение угла между прямой и плоскостью, при этом воспользуемся понятием ортогональной проекции прямой на плоскость.

Если прямая перпендикулярна плоскости, то ее ортогональная проекция на эту плоскость есть точка пересечения этой прямой с плоскостью. В этом случае угол между прямой и плоскостью считается равным 90°.

**2. Угол между прямой и плоскостью.** Рассмотрим понятие угла между прямой и плоскостью.

**Определение.** *Углом между прямой, не перпендикулярной плоскости, и плоскостью называется угол между прямой и ее прямоугольной проекцией на данную плоскость.*

**Теорема.** *Угол между прямой и плоскостью является наименьшим из всех углов, которые данная прямая образует с прямыми, лежащими в данной плоскости и проходящими через точку пересечения прямой и плоскости.*

Доказательство.

Пусть прямая $a$ пересекает плоскость $\alpha$ в точке $O$, $a'$ — ортогональная проекция прямой $a$ на плоскость $\alpha$, $b$ — произвольная прямая, лежащая в плоскости $\alpha$, проходящая через точку $O$ и не совпадающая с прямой $a'$. Обозначим буквой $\varphi_0$ угол между прямыми $a$ и $a'$, а буквой $\varphi$ — угол между прямыми $a$ и $b$. Докажем, что $\varphi_0 < \varphi$ (рис. 172, *б*).

Если прямые $a$ и $b$ не перпендикулярны, то из точки $M \in a$ проведем перпендикуляры $MA$ и $MB$ к прямым $a'$ и $b$ соответственно. Из прямоугольных треугольников $MAO$ и $MBO$ находим $\sin\varphi_0 = \frac{MA}{MO}$, $\sin\varphi = \frac{MB}{MO}$. Так как $MA < MB$, то $\sin\varphi_0 < \sin\varphi$. Отсюда следует, что $\varphi_0 < \varphi$ (так как $0 < \varphi \leqslant 90°$, а функция $\sin x$ на указанном промежутке является возрастающей).

Если $a \perp b$, то $\varphi = 90°$, а значит, $\varphi > \varphi_0$.

Теорема доказана.

Задача. Дан правильный тетраэдр $DABC$. Найдите косинус угла между прямой $AB$ и плоскостью $DBC$.

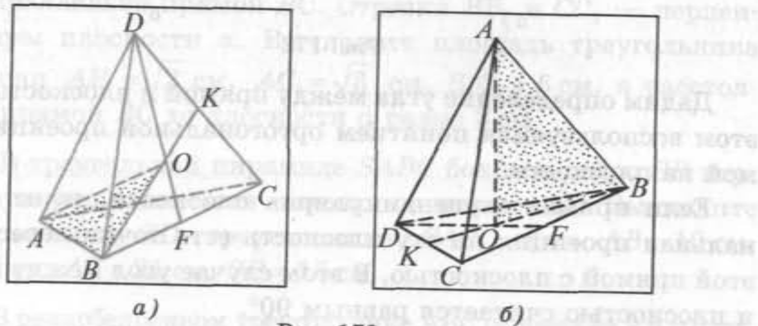


Рис. 173

Решение.

1) Угол между прямой $AB$ и плоскостью $DBC$ равен углу между прямой $AB$ и ортогональной проекцией этой прямой на плоскость $DBC$.

2) Для построения ортогональной проекции прямой $AB$ на плоскость $DBC$ достаточно построить основание перпендикуляра, проведенного из произвольной точки прямой $AB$ к плоскости $DBC$ (например, из точки $A$).



3) Если точка $O$ — основание перпендикуляра, проведенного из точки $A$ к плоскости $DBC$, то $OC = OB = OD$ (проекции равных соответственно наклонных $AC$, $AB$, $AD$). Следовательно, точка $O$ равноудалена от вершин треугольника $DBC$, а такой точкой в равностороннем треугольнике $DBC$ является точка пересечения медиан $BK$ и $DF$. Таким образом, прямая $BO$ — перпендикулярная проекция прямой $AB$ на плоскость $DBC$ (рис. 173, *а*, *б*).

4) Теперь найдем косинус угла между прямой $AB$ и плоскостью $DBC$. Пусть ребро тетраэдра равно $a$. В прямоугольном треугольнике $AOB$ $\left(AB = a,\ \angle AOB = 90°,\ BO = \frac{2}{3}BK = \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$ $\cos\angle ABO = \frac{OB}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{3} : a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

## Задачи к § 3

I

**1.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. а) Верно ли, что прямая $B_1C$ есть ортогональная проекция прямой $B_1D$ на плоскость грани $BCC_1B_1$ (рис. 174, *а*)? б) Какая прямая является перпендикулярной проекцией прямой $AC$ на плоскость грани $DCC_1D_1$? в) Почему угол между прямыми $B_1D$ и $DC$ не равен углу между прямой $B_1D$ и плоскостью $DCC_1$?

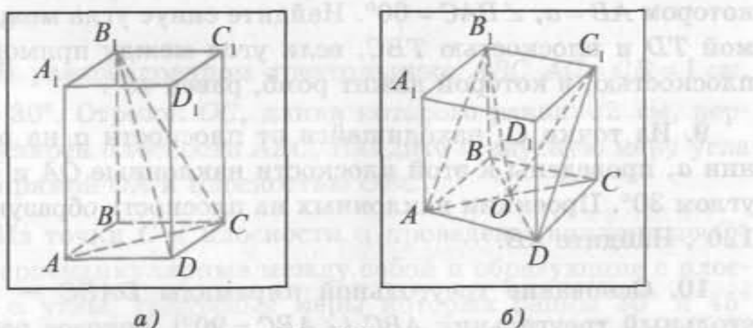


Рис. 174

**2.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали основания $ABCD$ пересекаются в точке $O$ (рис. 174, *б*). а) Назовите ортогональную проекцию прямой $DC_1$ на плоскость диагонального сечения

$ACC_1A_1$. б) Верно ли, что прямая $AB_1$ является ортогональной проекцией прямой $B_1O$ на плоскость грани $ABB_1A_1$?

**3.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. а) Верно ли, что угол между прямой $AB_1$ и плоскостью грани $BCC_1B_1$ равен 30°? б) Найдите синус угла между прямой $B_1D$ и плоскостью грани $ADD_1A_1$.

**4.** Отрезок $AM$ является перпендикуляром к плоскости квадрата $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке $O$. Определите синус угла $\varphi$ между прямой $MO$ и плоскостью $MAB$, если $MA = AD$.

**5.** Отрезок $OB$ перпендикулярен плоскости прямоугольника $ABCD$, $AB = 3$ см, $AD = 4$ см. Вычислите расстояние от точки $O$ до плоскости прямоугольника, если угол между прямой $OD$ и плоскостью $ABC$ равен 30°.

**6.** Основание четырехугольной пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$, боковое ребро $SA$ пирамиды перпендикулярно плоскости основания. Прямая $SC$ образует с плоскостью $SAB$ угол $\varphi$. Определите косинус угла между прямой $SC$ и плоскостью $ABCD$, если $DC = a$.

**7.** Точка $T$ находится на расстоянии $a$ от каждой из вершин квадрата $ABCD$. Найдите угол между прямой $BT$ и плоскостью данного квадрата, если $AD = a$.

**8.** Отрезок $BT$ перпендикулярен плоскости ромба $ABCD$, в котором $AB = a$, $\angle BAC = 60°$. Найдите синус угла между прямой $TD$ и плоскостью $TBC$, если угол между прямой $TD$ и плоскостью, в которой лежит ромб, равен 45°.

**9.** Из точки $O$, находящейся от плоскости $\alpha$ на расстоянии $a$, проведены к этой плоскости наклонные $OA$ и $OB$ под углом 30°. Проекции наклонных на плоскость образуют угол 120°. Найдите $AB$.

**10.** Основание треугольной пирамиды $DABC$ — прямоугольный треугольник $ABC$ ($\angle ABC = 90°$), боковое ребро $DB$ перпендикулярно плоскости ее основания. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если $DB = a$, а прямые $DA$ и $DC$ образуют с плоскостью основания углы, градусные меры которых равны 30° и 45° соответственно.



## II

**11.** Основание треугольной пирамиды $DABC$ — равнобедренный треугольник $ABC$ ($AB = CB$), боковое ребро $DB$ пирамиды перпендикулярно плоскости ее основания. Вычислите радиус окружности, вписанной в основание пирамиды, если $AD = 11$ см, $AC = 10$ см, а высота $DK$ грани $DAC$ образует с плоскостью основания угол 60°.

**12.** Боковое ребро $SA$ четырехугольной пирамиды, основание которой — прямоугольник $ABCD$, перпендикулярно плоскости ее основания. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника $SAC$, если $SB = 2$ см, а боковые ребра $SB$ и $SD$ образуют с плоскостью основания углы, градусные меры которых равны 30° и 45° соответственно.

**13.** Из точки $O$ к плоскости $\alpha$ проведены равные наклонные $OA$ и $OB$, градусная мера угла между которыми равна 60°, а градусная мера угла между их проекциями на эту плоскость равна 90°. Вычислите углы между наклонными и плоскостью $\alpha$.

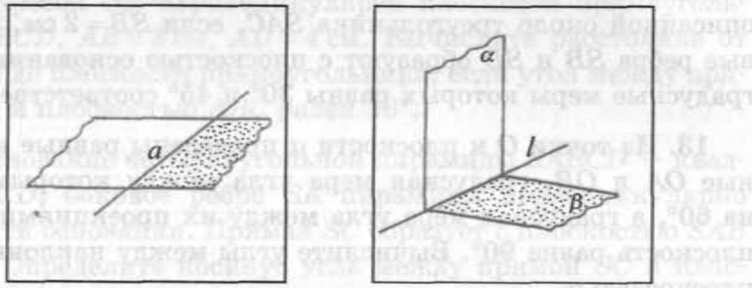
**14.** Из некоторой точки проведены к плоскости две наклонные, образующие с ней углы, градусные меры которых — 45° и 60°. Вычислите длину каждой наклонной, если расстояние между основаниями наклонных равно 1 см, а градусная мера угла между их проекциями на плоскость равна 30°.

**15.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ $AC = CB = 1$ см, $\angle BAC = 30°$. Отрезок $OC$, длина которого равна $\sqrt{2}$ см, перпендикулярен плоскости $ABC$. Найдите градусную меру угла между прямой $OA$ и плоскостью $OBC$.

**16.** Из точки $C$ к плоскости $\alpha$ проведены наклонные $CA$ и $CB$, перпендикулярные между собой и образующие с плоскостью $\alpha$ углы, градусные меры которых равны 30° и 45° соответственно. Определите градусную меру угла, образованного с плоскостью $\alpha$ перпендикуляром, проведенным из точки $C$ к прямой $AB$.

## § 4. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей

**1. Двугранный угол.** Пусть прямая $a$ лежит в плоскости, тогда можно указать две части этой плоскости, каждая из которых вместе с прямой $a$ называется полуплоскостью. Прямая $a$ называется граничной для каждой из полуплоскостей (рис. 175, *а*). Две полуплоскости с общей граничной прямой $l$, расположенные в пространстве, могут не лежать в одной плоскости (рис. 175, *б*).




а) б)

Рис. 175

Определение. ***Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой и частью пространства, для которой эти полуплоскости служат границей.***

Полуплоскости называются *гранями* двугранного угла, общая граничная прямая $l$ полуплоскостей называется *ребром* двугранного угла (см. рис. 175, *б*).

Представление о двугранном угле дает полураскрытая книга, двускатная крыша здания.

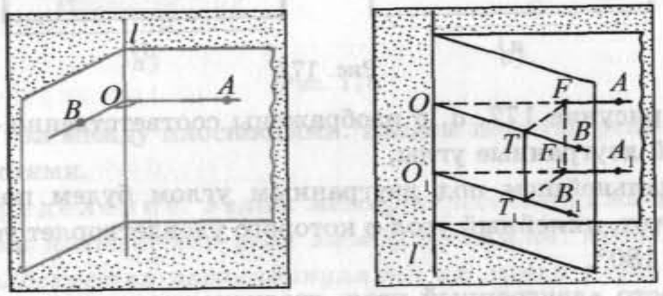
Если грани двугранного угла лежат в одной плоскости, то он называется *развернутым*.

**2. Линейный угол двугранного угла.** Для измерения двугранного угла вводится понятие его линейного угла. Пусть точка $O$ лежит на ребре $l$ двугранного угла (рис. 176, *а*). В каждой грани проведем лучи $OA$ и $OB$ перпендикулярно ребру $l$. Угол $AOB$, сторонами которого служат лучи $OA$ и $OB$, называется линейным углом данного двугранного угла.



Определение. ***Линейным углом двугранного угла называется угол, сторонами которого являются лучи с общим началом на ребре двугранного угла, которые проведены в его гранях перпендикулярно ребру.***

Пусть $AOB$ — линейный угол двугранного угла, ребро которого $l$ (см. рис. 176, *а*). Так как $OA \perp l$ и $OB \perp l$, то плоскость, в которой лежат лучи $OA$ и $OB$, перпендикулярна прямой $l$. Таким образом, линейный угол двугранного угла — это угол, образованный пересечением двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.



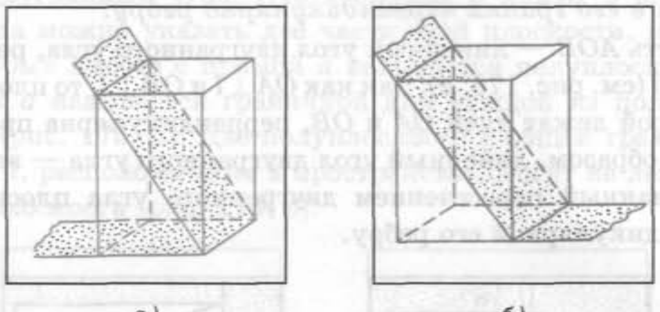

а) б)

Рис. 176

Все линейные углы двугранного угла равны между собой. Действительно, рассмотрим два линейных угла $AOB$ и $A_1O_1B_1$ двугранного угла, ребро которого $l$. Лучи $OA$ и $O_1A_1$ лежат в одной грани и перпендикулярны ребру $l$, следовательно, $OA \parallel O_1A_1$. Аналогично $OB \parallel O_1B_1$ (рис. 176, *б*). Отложим на лучах $OA$ и $O_1A_1$ равные отрезки $OF$ и $O_1F_1$ соответственно, а на лучах $OB$ и $O_1B_1$ — равные отрезки $OT$ и $O_1T_1$ соответственно. Так как $OF = O_1F_1$ и $OF \parallel O_1F_1$, то четырехугольник $OFF_1O_1$ — параллелограмм. Поэтому $OO_1 = FF_1$, $OO_1 \parallel FF_1$. Аналогично, $OO_1 = TT_1$ и $OO_1 \parallel TT_1$. Поэтому $FF_1 = TT_1$ и $FF_1 \parallel TT_1$, т. е. четырехугольник $TFF_1T_1$ — параллелограмм. Следовательно, $TF = T_1F_1$. Таким образом, треугольники $OFT$ и $O_1F_1T_1$ равны по трем сторонам, значит, $\angle FOT = \angle F_1O_1T_1$, т. е. $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$.

***Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.***

Двугранный угол называется прямым (острым, тупым), если его градусная мера равна 90° (меньше 90°, больше 90°).



а) б)

Рис. 177

На рисунке 177, *а*, *б* изображены соответственно острый и тупой двугранные углы.

В дальнейшем под двугранным углом будем понимать всегда тот, линейный угол $\varphi$ которого удовлетворяет условию $0 < \varphi < 180°$.

Вместо «двугранный угол, градусная мера которого равна $\alpha$» коротко говорят «двугранный угол, равный $\alpha$».

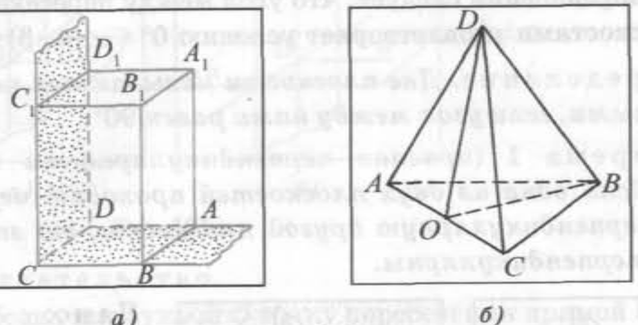
Двугранный угол, ребро которого есть прямая $AB$, а гранями являются полуплоскости $\alpha$ и $\beta$, обозначается $\alpha AB\beta$ (или $TABE$, если на разных его гранях отмечены точки $T$ и $E$).

Рассмотрим примеры. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. Тогда $\angle ADD_1$ является линейным углом двугранного угла, ребро которого есть прямая $DC$, а его грани — полуплоскости, в которых лежат прямоугольники $ABCD$ и $DCC_1D_1$ (так как $AD \perp DC$ и $DD_1 \perp DC$). Угол $ADD_1$ — прямой, следовательно, указанный двугранный угол — прямой (рис. 178, *а*).

*Двугранным углом при ребре пирамиды* называется двугранный угол, ребро которого содержит ребро пирамиды, а грани двугранного угла содержат грани пирамиды, которые пересекаются по данному ребру пирамиды.

Пусть $DABC$ — правильная треугольная пирамида, а точка $O$ — середина отрезка $AC$. Угол $DOB$ есть линейный угол двугранного угла $DACB$, ребро которого — прямая $AC$, а гранями являются полуплоскости, содержащие треугольники $ABC$ и $ACD$ (так как $DO \perp AC$ и $BO \perp AC$) (рис. 178, *б*).





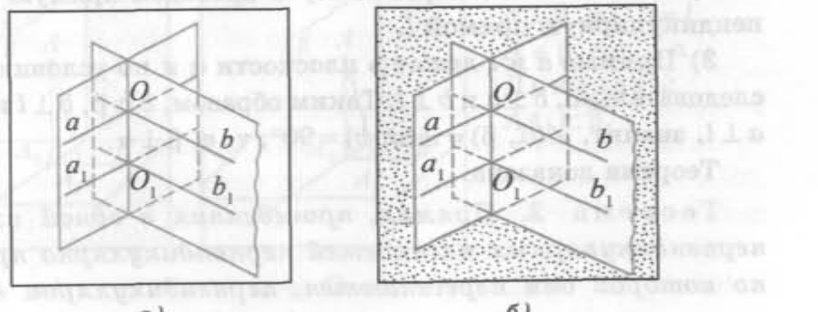

а) б)

Рис. 178

**3. Угол между плоскостями.** Введем понятие угла между плоскостями.

Определение. *Углом между пересекающимися плоскостями называется угол между прямыми, проведенными в плоскостях перпендикулярно их линии пересечения через некоторую точку.*

Заметим, что определение угла между плоскостями не зависит от выбора прямых $a$ и $b$, проведенных в плоскостях и перпендикулярных их линии пересечения. Действительно, если в данных плоскостях провести какие-нибудь другие прямые $a_1$ и $b_1$ перпендикулярно их линии пересечения $l$ через точку $O_1$, то $a \parallel a_1$ и $b \parallel b_1$, а следовательно, угол между прямыми $a$ и $b$ равен углу между прямыми $a_1$ и $b_1$ (рис. 179, *а*, *б*).




а) б)

Рис. 179

Если плоскости параллельны, то угол между ними считается равным 0°. Угол между плоскостями $\alpha$ и $\beta$ обозначается $\angle(\alpha, \beta)$.

Из определения следует, что угол между пересекающимися плоскостями удовлетворяет условию $0° < \angle(\alpha, \beta) \leqslant 90°$.

Определение. *Две плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.*

Теорема 1 (*признак перпендикулярности плоскостей*). *Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.*

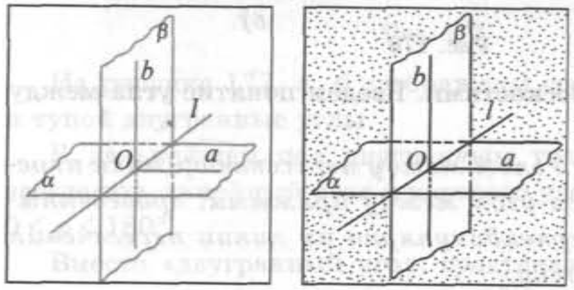


Рис. 180

Дано:
прямая $b$ лежит в плоскости $\beta$,
$b \perp \alpha$
(рис. 180, *а*, *б*).
Доказать:
$\beta \perp \alpha$.

Доказательство.

1) Пусть точка $O$ — точка пересечения прямой $b$ с плоскостью $\alpha$. Точка $O$ — общая точка плоскостей $\alpha$ и $\beta$, следовательно, данные плоскости пересекаются по прямой $l$, проходящей через точку $O$.

2) В плоскости $\alpha$ через точку $O$ проведем прямую $a$, перпендикулярную прямой $l$.

3) Прямые $a$ и $l$ лежат в плоскости $\alpha$ и по условию $b \perp \alpha$, следовательно, $b \perp a$ и $b \perp l$. Таким образом, $b \subset \beta$, $b \perp l$ и $a \subset \alpha$, $a \perp l$, значит, $\angle(\alpha, \beta) = \angle(a, b) = 90°$, т. е. $\beta \perp \alpha$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Прямая, проведенная в одной из двух перпендикулярных плоскостей перпендикулярно прямой, по которой они пересекаются, перпендикулярна другой плоскости.*



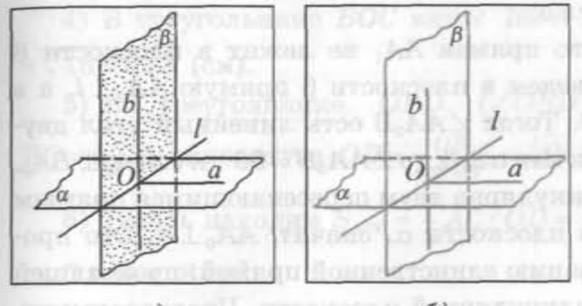


Рис. 181

Дано:
$\beta \perp \alpha$, $\beta \cap \alpha = l$,
$b \subset \beta$, $b \perp l$.
Доказать:
$b \perp \alpha$.

Доказательство.

1) Обозначим буквой $O$ точку пересечения прямой $b$ с прямой $l$ (рис. 181, *а*, *б*).

2) Проведем в плоскости $\alpha$ через точку $O$ прямую $a$ перпендикулярно прямой $l$.

3) Прямые $a$ и $b$ перпендикулярны прямой $l$, по которой пересекаются плоскости $\alpha$ и $\beta$. Следовательно, угол между прямыми $a$ и $b$ равен углу между плоскостями $\alpha$ и $\beta$, значит, равен 90°.

4) Таким образом, прямая $b$ перпендикулярна пересекающимся прямым $a$ и $b$ плоскости $\alpha$. Следовательно, $b \perp \alpha$.

Теорема доказана.

Задача 1. Докажите, что прямая, проведенная через точку одной из перпендикулярных плоскостей перпендикулярно второй плоскости, лежит в первой плоскости.

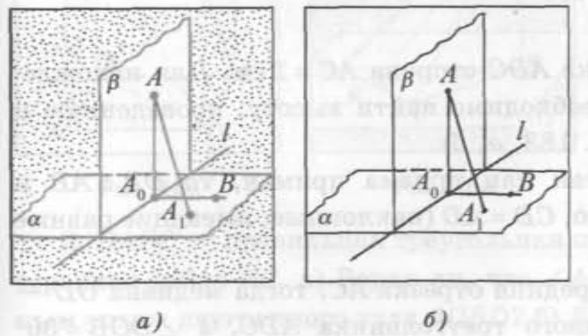


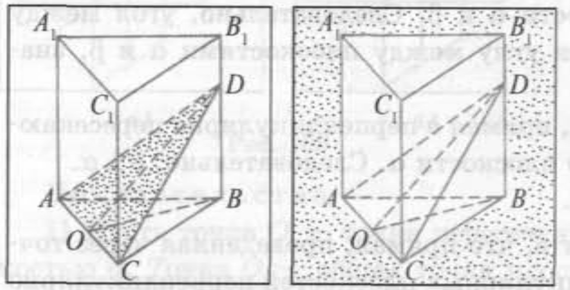
Рис. 182

Дано:
$\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = l$,
$A \in \beta$, $AA_1 \perp \alpha$.
Доказать:
$AA_1 \subset \beta$.

**Доказательство.**

Предположим, что прямая $AA_1$ не лежит в плоскости $\beta$ (рис. 182, *а*, *б*). Проведем в плоскости $\beta$ прямую $AA_0 \perp l$, а в плоскости $\alpha$ $BA_0 \perp l$. Тогда $\angle AA_0B$ есть линейный угол двугранного угла $\alpha l \beta$. Так как $\alpha \perp \beta$, то $\angle AA_0B = 90°$, т. е. $AA_0 \perp BA_0$. Прямая $AA_0$ перпендикулярна двум пересекающимся прямым $l$ и $BA_0$, лежащим в плоскости $\alpha$, значит, $AA_0 \perp \alpha$. Это противоречит существованию единственной прямой, проходящей через точку и перпендикулярной плоскости. Предположение, что прямая $AA_1$ не лежит в плоскости $\beta$, неверное, а значит, $AA_1$ лежит в плоскости $\beta$.

Задача 2. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник $ABC$, в котором $AB = BC = 7$ см, $AC = 2$ см. Через прямую $AC$ проведена плоскость $\alpha$ под углом 30° к плоскости $ABC$, пересекающая боковое ребро $BB_1$ в точке $D$. Найдите площадь полученного сечения (рис. 183, *а*, *б*).



*а)* *б)*

Рис. 183

**Дано:**
$ABCA_1B_1C_1$ прямая призма,
$AC \subset \alpha$,
$\angle(\alpha ABC) = 30°$,
$AB = CB = 7$ см,
$AC = 2$ см.

**Найти:**
$S$ сечения.

**Решение.**

1) В треугольнике $ADC$ сторона $AC = 2$ см. Для нахождения его площади необходимо найти высоту, проведенную к стороне $AC$ (см. рис. 183, *а*, *б*).

2) $DB \perp (ABC)$ (так как призма прямая, то $DB \perp AB$ и $DB \perp BC$). Кроме того, $CD = AD$ (наклонные, имеющие равные проекции $CB$ и $AB$).

3) Пусть $O$ — середина отрезка $AC$, тогда медиана $OD$ — высота равнобедренного треугольника $ADC$, а $\angle DOB = 30°$ (так как $DO \perp AC$ и $BO \perp AC$).



4) В треугольнике $BOC$ катет $BO = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{49 - 1} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ (см).

5) В треугольнике $OBD$ ($\angle OBD = 90°$, $\angle DOB = 30°$, $BO = 4\sqrt{3}$) гипотенуза $OD = \dfrac{OB}{\cos 30°} = \sqrt{48} : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 8$ (см).

6) Теперь находим $S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot OD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = 8$ (см²).

**Ответ:** 8 см².

Задача 3. Докажите, что площадь $S_{орт}$ ортогональной проекции треугольника $ABC$ на плоскость равна произведению его площади $S$ на косинус угла $\varphi$ между плоскостью треугольника и плоскостью проекции: $S_{орт} = S \cos \varphi$.

## Задачи к § 4

### I

**1.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 184). а) Верно ли, что $\angle BDB_1$ является линейным углом двугранного угла $B_1ADB$? б) Докажите, что $\angle B_1AB$ есть линейный угол двугранного угла $B_1ADB$. в) Найдите градусную меру двугранного угла $D_1CBA$.

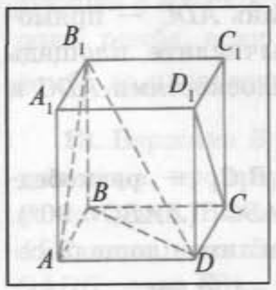


Рис. 184

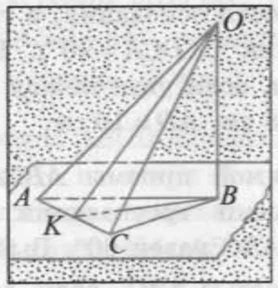


Рис. 185

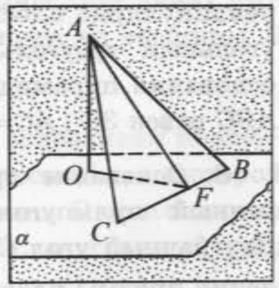


Рис. 186

**2.** $DABC$ — правильная треугольная пирамида, точка $O$ — середина ребра $BC$. а) Верно ли, что $\angle ACD$ является линейным углом двугранного угла $ACBD$? б) Докажите, что $\angle AOD$ есть линейный угол двугранного угла $ACBD$.

**3.** $ABC$ — равнобедренный треугольник, $AB = BC$. Отрезок $OB$ перпендикулярен плоскости $ABC$, точка $K$ — середина стороны $AC$ (рис. 185). а) Являются ли углы $OCB$ и $OAB$ линейными углами двугранного угла $OACB$? б) Докажите, что $\angle OKB$ есть линейный угол двугранного угла $OACB$.

**4.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ $A_1C$ образует с плоскостью основания угол $30°$. Вычислите градусную меру двугранного угла $A_1CDA$, если $CD = 4$ см, $AD = 2\sqrt{2}$ см.

**5.** Сторона $BC$ треугольника $ABC$ лежит в плоскости $\alpha$, отрезок $AF$ — высота треугольника $ABC$, точка $O$ — основание перпендикуляра, проведенного из точки $A$ к плоскости $\alpha$. Докажите, что $AFO$ — линейный угол двугранного угла $ABCO$ (рис. 186).

**6.** Катет $BC$ прямоугольного треугольника $ABC$ ($\angle ABC = 90°$) лежит в плоскости $\alpha$. Точка $O$ — основание перпендикуляра, проведенного из вершины $A$ к плоскости $\alpha$. Двугранный угол $ABCO$ равен $45°$. Вычислите градусную меру угла между прямой $AC$ и плоскостью $\alpha$, если $BC = 2$ см, $AO = \sqrt{2}$ см.

**7.** В треугольной пирамиде $DABC$ боковое ребро $DB$ перпендикулярно плоскости основания, а грань $ADC$ — прямоугольный треугольник ($\angle DCA = 90°$). Вычислите площадь основания пирамиды, если угол между плоскостями $ADC$ и $ABC$ равен $30°$, $AC = 8$ см, $AD = 10$ см.

**8.** Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равнобедренный прямоугольный треугольник $ABC$ ($\angle ABC = 90°$). Двугранный угол $C_1ABC$ равен $60°$. Вычислите площадь сечения призмы плоскостью $ABC_1$, если $AC = 4\sqrt{2}$ см.

**9.** Длины катетов прямоугольного треугольника 6 см и 8 см. Вычислите расстояние от вершины прямого угла данного треугольника до плоскости, которая проходит через гипотенузу и образует угол $30°$ с плоскостью треугольника.



**10.** Прямая $OB$ перпендикулярна плоскости параллелограмма $ABCD$, отрезок $BK$ — высота данного параллелограмма (рис. 187, *а*, *б*). а) Верно ли, что угол $OAB$ является линейным углом двугранного угла $OADB$? б) Докажите, что $\angle OKB$ является линейным углом двугранного угла $OADB$.

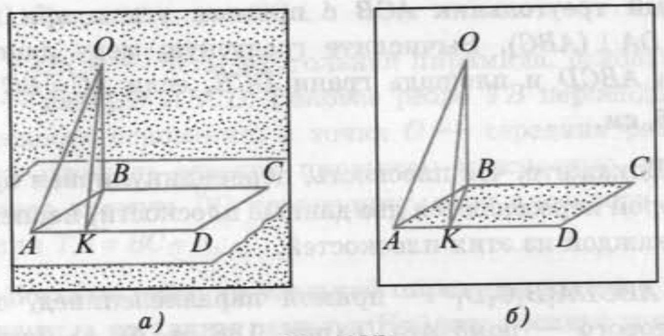



Рис. 187

**11.** Дан двугранный угол $\alpha l \beta$. В грани $\beta$ из точки $A$ проведен перпендикуляр $AB$ к ребру $l$, из этой же точки $A$ проведен перпендикуляр $AC$ к плоскости, содержащей грань $\alpha$, причем $C \in \alpha$. Докажите, что $\angle ABC$ есть линейный угол данного двугранного угла.

**12.** Сторона $AD$ ромба $ABCD$ лежит в плоскости $\alpha$, образующей с плоскостью ромба угол $60°$. Вычислите длину стороны ромба, если $\angle ABD = 45°$, а расстояние от вершины $B$ ромба до плоскости $\alpha$ равно $\sqrt{3}$ см.

**13.** Вершина $B$ ромба $ABCD$ является основанием перпендикуляра, проведенного из точки $O$ к плоскости, в которой лежит ромб. Вычислите расстояние от точки $O$ до плоскости $ABC$, если угол $BAD$ равен $45°$, $AB = 2$ см, двугранный угол $OADB$ равен $60°$.

**14.** В ромбе $ABCD$ сторона $AB = 20$ см, $\angle BAD = 45°$, точка $E$ — основание перпендикуляра, проведенного из вершины $B$ к плоскости $\alpha$, содержащей сторону $AD$. Вычислите расстояние от точки $E$ до плоскости $ABC$, если двугранный угол $BADE$ равен $60°$.

**15.** Основание прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм $ABCD$, площадь которого 40 см². Вычислите площадь сечения параллелепипеда плоскостью $ADB_1$, если известно, что она образует с плоскостью основания угол 60°.

**16.** Основание треугольной пирамиды $DABC$ — прямоугольный треугольник $ACB$ с прямым углом при вершине $C$, $DA \perp (ABC)$. Вычислите градусную меру двугранного угла $ABCD$ и площадь грани $DCB$, если $AC = BC = 1$ см, $DB = \sqrt{5}$ см.

**17.** Докажите, что плоскость, перпендикулярная прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна каждой из этих плоскостей.

**18.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, основание которого — ромб $ABCD$ (рис. 188, *а*, *б*). а) Докажите, что плоскость, содержащая грань $BCC_1B_1$, перпендикулярна плоскости $ABC$. б) Верно ли, что плоскости $BDD_1$ и $A_1AC$ взаимно перпендикулярны? в) Докажите, что плоскость $BDD_1$ перпендикулярна плоскости основания.

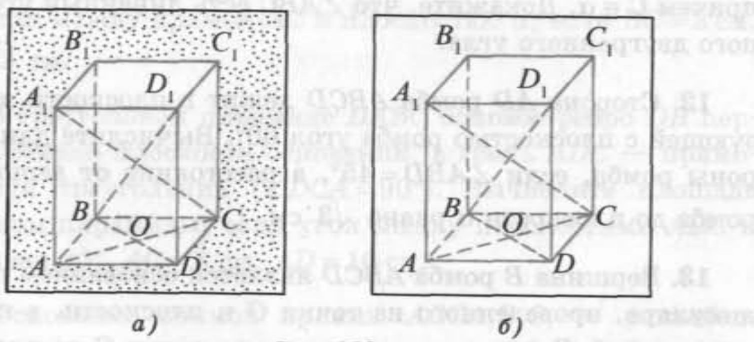



Рис. 188

**19.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковая грань $DD_1C_1C$ — квадрат. Докажите, что плоскости $BCD_1$ и $DC_1B_1$ перпендикулярны.

**20.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание $ABCD$ — квадрат. Точка $E$ делит отрезок $AC$ в отношении 1 : 3, считая от вершины $A$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку $E$ и



перпендикулярной плоскостям $ABC$ и $A_1AC$, если $BC = 1$ см, $AC_1 = \sqrt{6}$ см. Вычислите площадь этого сечения.

**21.** Плоскости $\alpha$ и $\beta$ пересекаются по прямой $l$. Из точки $O$ проведены перпендикуляры $OA$ и $OB$ к плоскостям $\alpha$ и $\beta$ соответственно. Прямая $l$ пересекает плоскость $OAB$ в точке $C$. Докажите, что $OC \perp l$.

**22.** $TABCD$ — четырехугольная пирамида, основание которой — квадрат $ABCD$. Боковое ребро $TB$ перпендикулярно плоскости основания, а точка $O$ — середина ребра $TC$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через прямую $DO$ перпендикулярно плоскости основания, если $TB = BC = a$.

**23.** Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, а их длины равны $a$. Найдите косинус угла, образованного плоскостью боковой грани с плоскостью основания.

**24.** $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, точка $F$ — середина бокового ребра $SC$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую $DF$ и перпендикулярной плоскости $SBD$.

## II

**25.** Точки $K$ и $M$ — середины ребер $SC$ и $AC$ правильного тетраэдра $SABC$ соответственно. Найдите угол между плоскостями $ABK$ и $SBM$.

**26.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки $T$ и $K$ — середины ребер $CC_1$ и $DC$ соответственно. Найдите угол между плоскостями $ATD$ и $A_1D_1K$.

**27.** Центр равностороннего треугольника $ABC$ является основанием перпендикуляра, проведенного из точки $D$ к плоскости этого треугольника. Найдите косинус угла между плоскостями $ABC$ и $ABD$, если треугольник $ABD$ — равносторонний.

**28.** Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$. Боковое ребро $SB$ перпендикулярно плоскости основания, и $BS = 1$ см, $BC = 2$ см. На ребре $SC$ взята точка $O$ так, что $CO : OS = 1 : 3$. Постройте сечение пирамиды плоскостью $ABO$ и найдите тангенс угла между плоскостью $ABO$ и плоскостью основания пирамиды.

**29.** Вершина $C$ треугольника $ABC$ является ортогональной проекцией вершины $D$ треугольника $ABD$. Докажите, что площадь треугольника $ABC$ равна $S \cos \varphi$, где $S$ — площадь треугольника $ABD$, $\varphi$ — угол между плоскостями $ABD$ и $ABC$.

**30.** Точки $A$ и $B$ лежат на ребре двугранного угла, $AC$ и $BD$ — перпендикуляры к ребру, проведенные в разных гранях. Вычислите двугранный угол, если $AB = 24$ см, $AC = 8$ см, $BD = 5$ см и расстояние между точками $C$ и $D$ равно 25 см.

**31.** Точки $A$ и $B$ лежат на ребрах данного двугранного угла, равного 120°. Отрезки $AC$ и $BD$ проведены в разных гранях и перпендикулярны к ребру двугранного угла. Вычислите длину отрезка $CD$, если $AB = AC = BD = 3$ см.

**32.** Дан треугольник $ABC$, у которого $AB = BC = 3$ см, $AC = 4$ см. Сторона $AB$ лежит в плоскости $\alpha$, а проекции двух других сторон треугольника на эту плоскость относятся как $1 : 2$. Вычислите двугранный угол, образованный плоскостью $\alpha$ и плоскостью $ABC$.

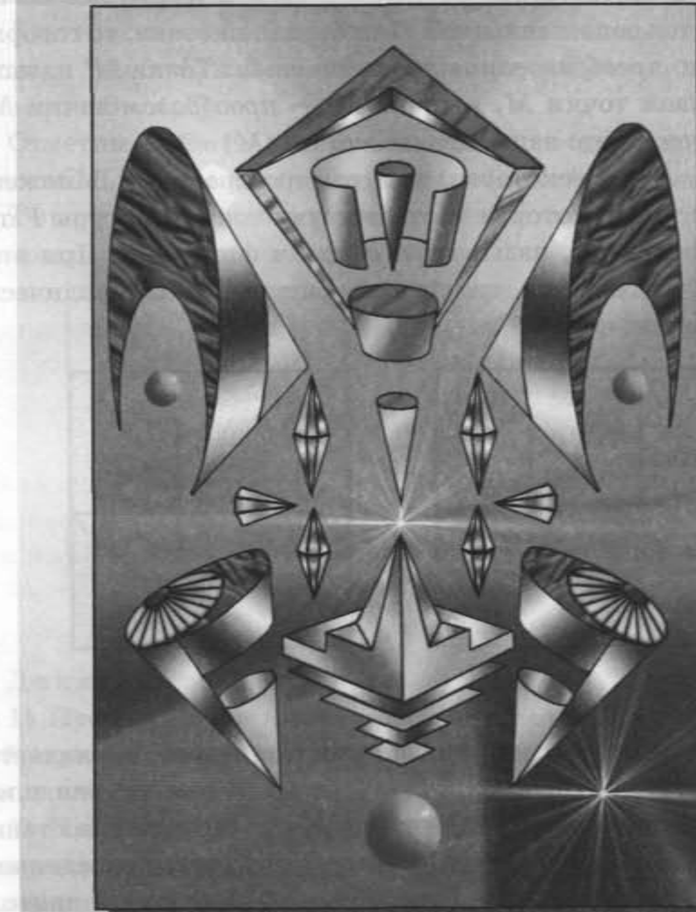
**33.** Вычислите двугранный угол, образованный двумя боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, длина бокового ребра которой равна 3 см, а стороны основания — $2\sqrt{3}$ см.

**34.** Длина бокового ребра правильной треугольной призмы равна 3 см, а стороны основания — 2 см. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через боковое ребро призмы и перпендикулярной противолежащей грани, и вычислите расстояние от точки пересечения диагоналей этого сечения до вершины призмы, не лежащей в сечении.

**35.** Длина каждого ребра правильной четырехугольной пирамиды равна $a$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середину бокового ребра, перпендикулярной плоскости основания пирамиды и параллельной его стороне.

# ГЛАВА 4*

## Движения пространства



## § 1. Движения. Центральная и осевая симметрии

**1. Преобразования пространства.** Рассмотрим понятие преобразования пространства.

Предположим, что установлено некоторое правило φ, по которому каждой точке $M$ пространства ставится в соответствие (сопоставляется) некоторая единственная точка $M'$ пространства. Если при этом *различным точкам пространства* ставятся в соответствие *различные точки* и *каждая точка* оказывается сопоставленной хотя бы одной точке, то говорят, что задано *преобразование пространства*. Точка $M'$ называется *образом* точки $M$, а точка $M$ — *прообразом* точки $M'$. Символически это записывается так: $\varphi(M) = M'$.

Пусть $F$ — некоторая фигура пространства. Множество $F'$ всех точек, которые соответствуют точкам фигуры $F$ при преобразовании φ, называется *образом* фигуры $F$. При этом фигура $F$ называется *прообразом* фигуры $F'$. Символически записывается: $\varphi(F) = F'$.

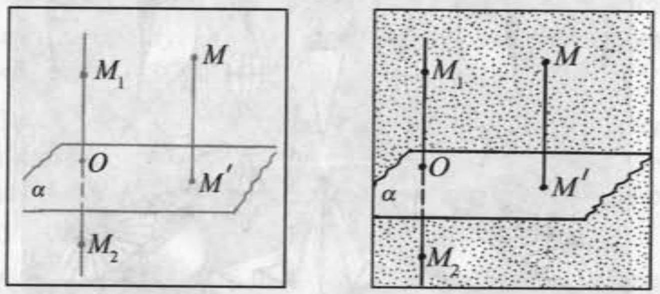



Рис. 189

Рассмотрим пример соответствия, которое не является преобразованием пространства. Пусть α — некоторая плоскость пространства. Каждой точке $M$ пространства поставим в соответствие основание $M'$ перпендикуляра, проведенного из точки $M$ к плоскости α (рис. 189, *а*, *б*). *Указанное правило соответствия между точками не является преобразованием пространства.* Действительно, в этом случае существуют различные точки $M_1$ и $M_2$ пространства, лежащие на прямой, перпендикулярной плоскости α, которым ставится в соответствие одна и та же точка $O$.



**2. Движения пространства.** Среди всех преобразований пространства выделяются преобразования, при которых сохраняется расстояние между любыми двумя точками пространства.

*Движением пространства* называется *преобразование пространства*, при котором *сохраняется расстояние между каждыми двумя точками пространства.*

Другими словами, если $A$ и $B$ — произвольные точки плоскости, а точки $A_1$ и $B_1$ — их образы при движении пространства, то $AB = A_1B_1$.

Отметим свойства, которыми обладают движения пространства. Докажем одно из основных свойств движения.

Теорема. *При движении пространства отрезок отображается на равный ему отрезок.*

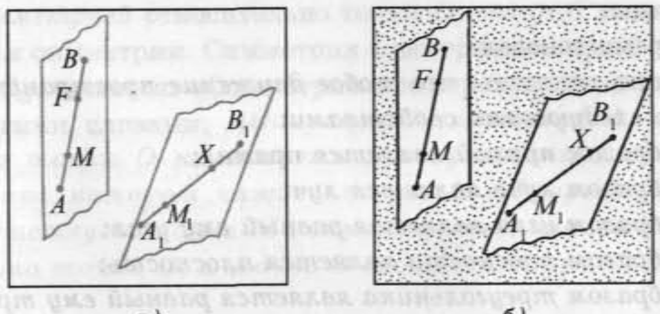



Рис. 190

Доказательство.

1) Пусть дано движение пространства и $AB$ — произвольный отрезок пространства. Докажем, что образом отрезка $AB$ при движении является равный ему отрезок.

2) Пусть $A_1$ и $B_1$ — образы точек $A$ и $B$ при данном движении пространства. Докажем, что отрезок $AB$ отображается на отрезок $A_1B_1$. Для этого нужно доказать, что образом каждой точки отрезка $AB$ является точка отрезка $A_1B_1$ и что в каждую точку отрезка $A_1B_1$ отображается некоторая точка отрезка $AB$ (рис. 190, *а*, *б*).

3) Пусть $M$ — произвольная точка отрезка $AB$ и $M_1$ — образ точки $M$ при данном движении. Докажем, что точка $M_1$ лежит на отрезке $A_1B_1$. Точка $M$ лежит на отрезке $AB$, следовательно, $AM + MB = AB$. Так как при движении пространства сохраняется расстояние между любыми двумя точками, то $AM = A_1M_1$, $MB = M_1B_1$ и $AB = A_1B_1$. Таким образом, $A_1M_1 + M_1B_1 = A_1B_1$, а это значит, точка $M_1$ лежит на отрезке $A_1B_1$.

4) Докажем, что в каждую точку отрезка $A_1B_1$ отображается некоторая точка отрезка $AB$. Пусть $X$ — произвольная точка отрезка $A_1B_1$ и $F$ — точка, которая отображается в точку $X$ при данном движении. Докажем, что точка $F$ лежит на отрезке $AB$. Так как точка $X$ лежит на отрезке $A_1B_1$, то $A_1X + XB_1 = A_1B_1$. При движении сохраняется расстояние между точками, значит, $A_1X = AF$, $XB_1 = FB$. Следовательно, $AF + FB = AB$. Отсюда следует, что точка $F$ лежит на отрезке $AB$. Отрезки $AB$ и $A_1B_1$ имеют равные длины, а значит, они равны.

Теорема доказана.

Можно доказать, что *любое движение пространства обладает следующими свойствами*:

1) *образом прямой является прямая*;

2) *образом луча является луч*;

3) *образом угла является равный ему угол*;

4) *образом плоскости является плоскость*;

5) *образом треугольника является равный ему треугольник*.

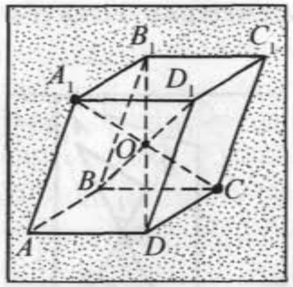
Рассмотрим некоторые виды движений.

**3. Центральная симметрия.** Рассмотрим движение пространства, которое называется *центральной симметрией*.

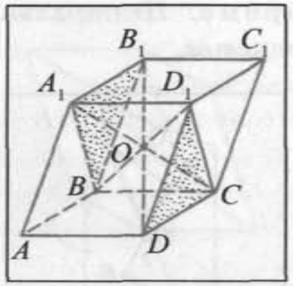
Определение. *Две точки $M$ и $M_1$ пространства называются симметричными относительно данной точки $O$, если точка $O$ является серединой отрезка $MM_1$.*

Например, если $O$ — точка пересечения диагоналей параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, то вершины $A_1$ и $C$ симметричны относительно точки $O$ (рис. 191, *а*). Действительно, $A_1O = OC$, так как каждая диагональ параллелепипеда точкой пересечения делится пополам.





а)



б)

Рис. 191

Пусть $O$ — некоторая точка пространства. Каждой точке $M$ пространства, которая не совпадает с точкой $O$, поставим в соответствие точку $M'$, симметричную точке $M$ относительно точки $O$, а точке $O$ поставим в соответствие саму эту точку. Указанное правило сопоставления точек пространства является преобразованием пространства и называется *центральной симметрией* относительно точки $O$, точка $O$ называется *центром* симметрии. Симметрия с центром в точке $O$ обозначается $S_O$ (читается: «Симметрия с центром в точке $O$»).

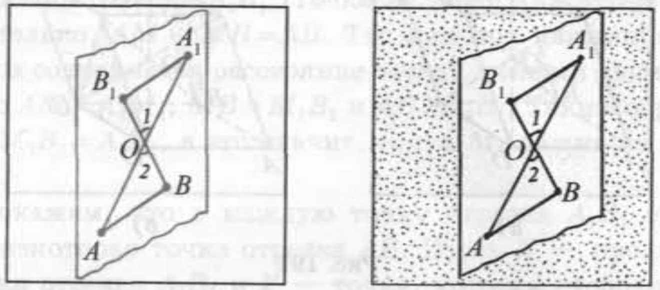
Другими словами, *центральной симметрией относительно точки $O$ называется преобразование пространства, при котором каждой точке $M \neq O$ пространства соответствует точка $M'$, симметричная точке $M$ относительно точки $O$, а точке $O$ соответствует сама точка $O$.*

Если фигура $F_1$ является образом фигуры $F$ при центральной симметрии $S_O$, то пишут $S_O(F) = F_1$.

Например, на рисунке 191, *б* изображен треугольник $A_1B_1B$, который является образом треугольника $CDD_1$ при центральной симметрии относительно точки $O$ пересечения диагоналей параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, т. е. $S_O(\triangle A_1B_1B) = \triangle CDD_1$. Заметим, что образом любого многогранника $F$ при центральной симметрии $S_O$ является многогранник $F'$, вершинами которого служат точки, симметричные вершинам данного многогранника $F$ относительно центра $O$.

Можно доказать, что центральная симметрия является движением.

**Теорема.** *Центральная симметрия есть движение пространства.*




а) б)

Рис. 192

**Доказательство.**

Пусть $A$ и $B$ — произвольные точки пространства, а точки $A_1$ и $B_1$ — их образы при симметрии с центром в точке $O \notin AB$ (рис. 192, *а*, *б*). Необходимо доказать, что $AB = A_1B_1$. Пусть $\alpha$ — плоскость, в которой лежат точки $A$, $B$, $O$, $A_1$, $B_1$. Рассмотрим треугольники $ABO$ и $A_1B_1O$. По определению центральной симметрии $AO = OA_1$ и $BO = OB_1$. Кроме того, $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные углы. Таким образом, треугольник $OAB$ равен треугольнику $OA_1B_1$ по двум сторонам и углу между ними. Из равенства этих треугольников следует, что $AB = A_1B_1$. В случае, когда $O \in AB$, равенство $AB = A_1B_1$ также выполняется (проведите доказательство самостоятельно).

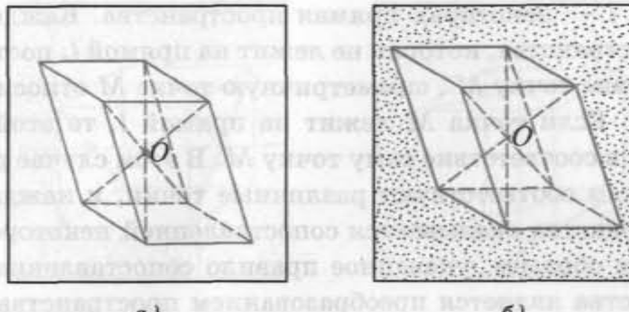
Теорема доказана.

*Фигура* $F$ в пространстве *называется симметричной относительно некоторой точки* $O$, *если ее образом при центральной симметрии* $S_O$ *является эта же фигура* $F$, *т. е.* $F = S_O(F)$. *При этом точка* $O$ *называется центром симметрии фигуры* $F$.

Другими словами, фигура $F$ называется симметричной относительно точки $O$, если для каждой точки этой фигуры точка, симметричная ей относительно $O$, также принадлежит фигуре $F$.

Примером пространственной фигуры, которая имеет центр симметрии, служит параллелепипед. Центром симметрии па-






а) б)

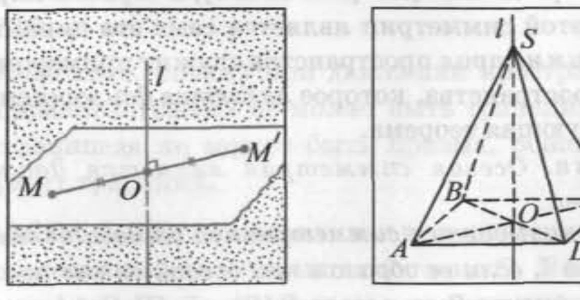
Рис. 193

раллелепипеда является точка $O$ пересечения его диагоналей (рис. 193, *а*, *б*).

**4. Осевая симметрия.** Рассмотрим преобразование пространства, которое называется осевой симметрией.

**Определение.** *Две точки* $M$ *и* $M'$ *пространства называются симметричными относительно прямой* $l$, *если отрезок* $MM'$ *перпендикулярен прямой* $l$ *и точка* $O$, *в которой прямая* $l$ *пересекает отрезок* $MM'$, *есть середина этого отрезка* (рис. 194, *а*).

Например, вершины $B$ и $D$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ симметричны относительно прямой $SO$, где $O$ — точка пересечения диагоналей основания этой пирамиды. В самом деле, прямая $SO$ перпендикулярна плоскости основания, а следовательно, и отрезку $BD$. Кроме того, точка $O$ есть точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$, а значит, — середина отрезка $BD$ (рис. 194, *б*).




а) б)

Рис. 194

Пусть $l$ — некоторая прямая пространства. Каждой точке $M$ пространства, которая не лежит на прямой $l$, поставим в соответствие точку $M'$, симметричную точке $M$ относительно прямой $l$. Если точка $M$ лежит на прямой $l$, то этой точке поставим в соответствие саму точку $M$. В этом случае различным точкам соответствуют различные точки, и каждая точка пространства оказывается сопоставленной некоторой точке. Таким образом, указанное правило сопоставления точек пространства является преобразованием пространства, которое называется *осевой симметрией* относительно прямой $l$, а прямая $l$ называется *осью симметрии*.

Другими словами, *осевой симметрией пространства относительно прямой $l$ называется преобразование пространства, при котором каждой точке $M \notin l$ пространства соответствует точка $M'$, симметричная точке $M$ относительно прямой $l$, а точке $P \in l$ соответствует сама точка $P$*. Осевая симметрия с осью $l$ обозначается $S_l$.

Запись $S_l(M) = M'$ означает, что точка $M'$ симметрична точке $M$ относительно прямой $l$.

Если фигура $F'$ является образом фигуры $F$ при осевой симметрии $S_l$, то пишут $S_l(F) = F'$. Заметим, что образом любого многогранника $F$ при осевой симметрии $S_l$ является многогранник $F'$, вершинами которого служат точки, симметричные вершинам данного многогранника $F$ относительно оси $l$.

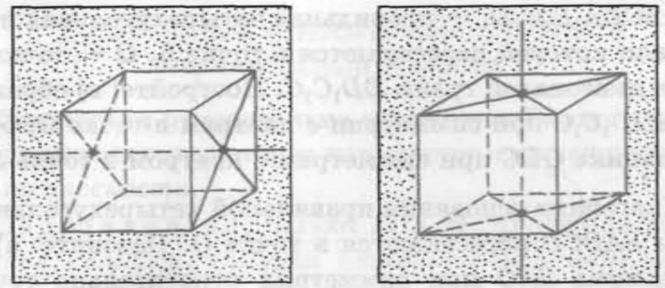
Например, если $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, а $O$ — точка пересечения диагоналей ее основания, то образом грани $SCD$ при симметрии относительно прямой $SO$ является грань $SAB$ (см. рис. 194, *б*), а образом пирамиды $SABCD$ при этой симметрии является сама эта пирамида.

*Осевая симметрия* пространства служит примером преобразования пространства, которое *является движением*. Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** *Осевая симметрия является движением пространства.*

*Фигура $F$ называется симметричной относительно некоторой прямой $l$, если ее образом при осевой симметрии $S_l$ является сама фигура $F$, т. е. если $S_l(F) = F$. При этом прямая $l$ называется осью симметрии фигуры $F$.*





а) б)

Рис. 195

Иначе говоря, фигура $F$ называется симметричной относительно прямой $l$, если для каждой точки этой фигуры симметричная ей точка относительно прямой $l$ также принадлежит фигуре $F$. Например, куб симметричен относительно прямых, проходящих через центры его противолежащих граней (рис. 195, *а*, *б*).

## Вопросы и задачи к § 1

**1.** Пусть $l$ — фиксированная прямая пространства. Каждой точке $M$ пространства поставим в соответствие точку пересечения прямой $l$ и плоскости, проходящей через точку $M$ и перпендикулярной прямой $l$. Объясните, почему такое сопоставление точек не является преобразованием пространства.

**2.** Докажите, что при движении пространства: а) параллельные прямые отображаются на параллельные прямые; б) параллельные плоскости отображаются на параллельные плоскости.

**3.** Объясните, почему при движении пространства: а) образом параллелограмма не может быть трапеция; б) образом параллелепипеда не может быть призма, основанием которой служит трапеция.

**4.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма, диагонали которой пересекаются в точке $O$. Назовите: а) образ грани $AA_1D_1D$ при симметрии с центром в точке $O$; б) образ пирамиды $OABCD$ при симметрии с центром в точке $O$.

**5.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма, диагонали которой пересекаются в точке $S$, $O$ — точка пересечения диагоналей грани $DD_1C_1C$. Постройте: а) образ пирамиды $SDD_1C_1C$ при симметрии с центром в точке $O$; б) образ треугольника $ODC$ при симметрии с центром в точке $S$.

**6.** Диагонали основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ пересекаются в точке $O$. Назовите: а) образ треугольника $SAO$ при симметрии относительно точки $O$; б) образ отрезка $OF$, где точка $F$ — точка пересечения медиан треугольника $SDC$ при симметрии относительно точки $O$.

**7.** $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, $O$ — точка пересечения диагоналей ее основания. Постройте: а) образ треугольника $SBD$ при симметрии относительно точки $O$; б) образ пирамиды $SABCD$ при симметрии относительно точки $O$.

**8.** Квадрат $A_1B_1C_1D_1$ является образом квадрата $ABCD$ при симметрии относительно точки $O$. Верно ли, что $A_1C_1 = 8$ см, если $S_{ABCD} = 62$ см$^2$?

**9.** Треугольник $A_1B_1C_1$ — образ треугольника $ABC$ при центральной симметрии. Вычислите радиус окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$, если $AC = 3$ см, $BC = 5$ см, $AB = 4$ см.

**10.** Точки $O$ и $O_1$ — центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите многогранник, симметричный призме $OCDO_1C_1D_1$ относительно прямой $OO_1$.

**11.** $SABCD$ правильная четырехугольная пирамида, точка $O$ — точка пересечения диагоналей ее основания $ABCD$. Назовите образ пирамиды $SOCD$ при симметрии относительно прямой $SO$.

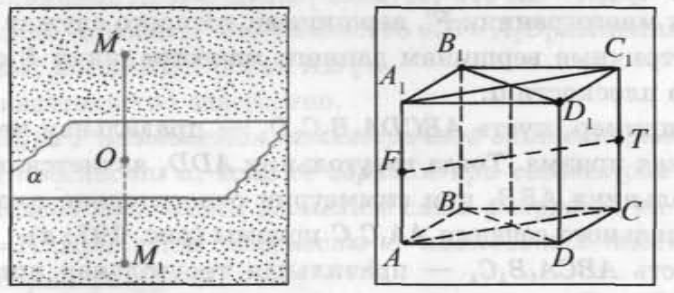
**12.** Точка $F$ — точка пересечения медиан грани $SCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$. Постройте образ точки $F$ при симметрии относительно прямой $SO$, где $O$ — точка пересечения диагоналей основания.

## § 2. Симметрия относительно плоскости. Параллельный перенос

**1. Симметрия относительно плоскости.** Рассмотрим движение пространства, которое называется *симметрией относительно плоскости*.

**Определение.** *Две точки $M$ и $M_1$ пространства называются симметричными относительно данной плоскости $\alpha$, если отрезок $MM_1$ перпендикулярен плоскости $\alpha$, а точка $O$ пересечения его с плоскостью $\alpha$ является серединой отрезка $MM_1$* (рис. 196, *а*).

Например, вершина $D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ симметрична вершине $B_1$ относительно плоскости, содержащей диагональное сечение $AA_1C_1C$. Точка $F$ — середина ребра $AA_1$ — симметрична относительно плоскости осевого сечения $BB_1D_1D$ точке $T$, которая является серединой ребра $CC_1$ (рис. 196, *б*).

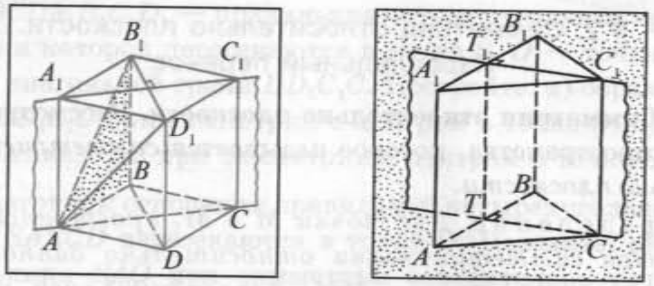


а) б)

Рис. 196

Пусть $\alpha$ — некоторая плоскость пространства. Каждой точке $M$ пространства, которая не принадлежит плоскости $\alpha$, поставим в соответствие точку $M'$, симметричную точке $M$ относительно плоскости $\alpha$, а каждой точке $P \in \alpha$ поставим в соответствие саму эту точку $P$. Указанное правило сопоставления точек пространства является преобразованием пространства и называется *симметрией* относительно плоскости $\alpha$. Симметрия относительно плоскости $\alpha$ обозначается $S_\alpha$ (читается: «Симметрия относительно плоскости $\alpha$»).

Другими словами, *симметрией относительно данной плоскости называется преобразование пространства, при котором каждой точке, не принадлежащей этой плос-*




а) б)

Рис. 197

*кости, соответствует точка, симметричная ей относительно плоскости, а каждой точке, принадлежащей плоскости, соответствует сама эта точка.*

Если фигура $F_1$ является образом фигуры $F$ при симметрии относительно плоскости $\alpha$, то пишут $S_\alpha(F) = F_1$.

Образом любого многогранника $F$ при симметрии $S_\alpha$ является многогранник $F'$, вершинами которого служат точки, симметричные вершинам данного многогранника $F$ относительно плоскости $\alpha$.

Например, пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма. Тогда треугольник $ADD_1$ является образом треугольника $ABB_1$ при симметрии относительно плоскости диагонального сечения $AA_1C_1C$ призмы (рис. 197, *а*).

Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, а точки $T_1$ и $T$ — середины ее ребер $A_1B_1$ и $AB$ соответственно. Тогда призма $ATCA_1T_1C_1$ симметрична призме $BTCB_1T_1C_1$ относительно плоскости сечения $TT_1C_1C$ (рис. 197, *б*).

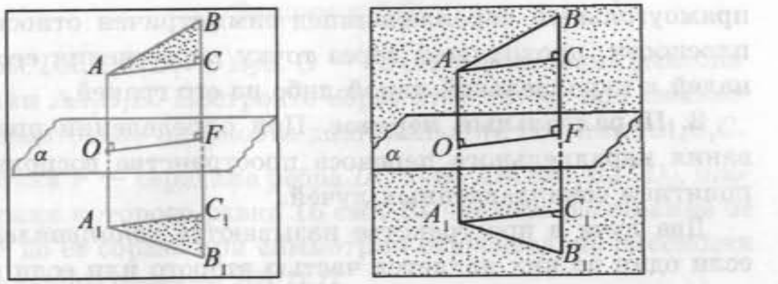
Симметрия относительно плоскости является движением пространства.

Теорема. *Симметрия относительно плоскости является движением пространства.*

Доказательство.

Пусть $A$ и $B$ — произвольные точки пространства и отрезок $AB$ не перпендикулярен плоскости $\alpha$, а точки $A_1$ и $B_1$ — их образы при симметрии относительно плоскости $\alpha$. Рассмотрим случай, когда отрезок $AB$ не параллелен плоскости $\alpha$ и не пересекает эту плоскость. Пусть точки $O$ и $F$ — точки пересечения плоскости $\alpha$ с отрезками $AA_1$ и $BB_1$ соответственно (рис. 198, *а*, *б*). Докажем, что $AB = A_1B_1$.






а) б)

Рис. 198

Пусть для определенности $BF > AO$. Рассмотрим отрезки $AC$ и $A_1C_1$ такие, что $AC \parallel OF$, $C \in BF$ и $A_1C_1 \parallel OF$, $C_1 \in B_1F$.

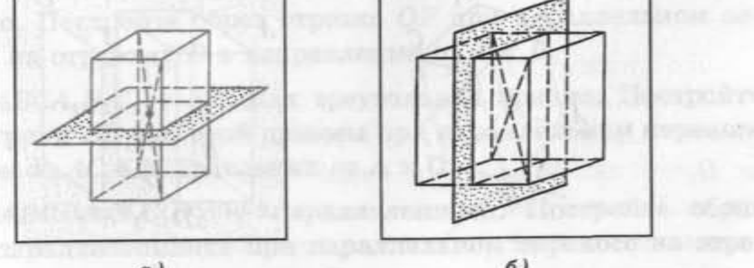
Тогда прямоугольные треугольники $ACB$ и $A_1C_1B_1$ равны по двум катетам ($AC = OF = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, так как $BC = BF - CF$, $B_1C_1 = B_1F - FC_1$, $BF = B_1F$ и $CF = C_1F$). Из равенства треугольников $ACB$ и $A_1C_1B_1$ следует, что $AB = A_1B_1$.

Можно доказать, что равенство $AB = A_1B_1$ выполняется и в случае, когда $AB \perp \alpha$ или $AB \parallel \alpha$.

Доказательство завершено.

*Фигура $F$ называется симметричной относительно некоторой плоскости $\alpha$, если ее образом при симметрии $S_\alpha$ относительно плоскости является сама фигура $F$, т. е. если $S_\alpha(F) = F$. При этом плоскость $\alpha$ называется плоскостью симметрии фигуры $F$.*

Другими словами, фигура $F$ называется симметричной относительно плоскости $\alpha$, если для каждой точки этой фигуры точка, симметричная ей относительно плоскости $\alpha$, также принадлежит фигуре $F$. Например, на рисунке 199, *а*, *б*



а) б)

Рис. 199

прямоугольный параллелепипед симметричен относительно плоскости, проходящей через точку пересечения его диагоналей и параллельной какой-либо из его граней.

**2. Параллельный перенос.** При определении преобразования параллельного переноса пространства воспользуемся понятием сонаправленных лучей.

Два луча в пространстве называются *сонаправленными*, если один из них является частью второго или если они параллельны и расположены по одну сторону от плоскости, не содержащей эти лучи и проходящей через их начала.

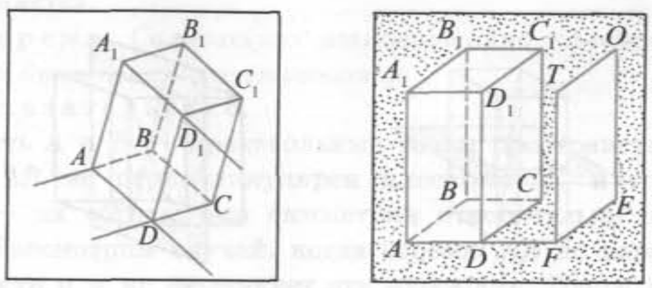
Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Тогда сонаправленными являются, например, лучи $AD$, $A_1D_1$ и лучи $BA$, $CD$ (рис. 200, *а*).

*Параллельным переносом* пространства на отрезок $AB$ в направлении от точки $A$ к точке $B$ называется преобразование, при котором каждой точке $M$ соответствует точка $M_1$ такая, что $AB = MM_1$, а лучи $AB$ и $MM_1$ — сонаправленные.

Рассмотрим пример. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед (рис. 200, *б*). Образом грани $AA_1B_1B$ при параллельном переносе на отрезок $AD$ в направлении от $A$ к $D$ является грань $DD_1C_1C$. Образом грани $DD_1C_1C$ при параллельном переносе на отрезок $DF$ в направлении от $D$ к $F$ служит прямоугольник $FTOE$.

Параллельный перенос пространства является движением. В качестве упражнения докажите самостоятельно следующую теорему.

Теорема. *Параллельный перенос пространства является движением.*




а) б)

Рис. 200



## Задачи к § 2

**1.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. $O$ — точка пересечения диагоналей грани $AA_1B_1B$. Постройте образ этой точки при симметрии относительно плоскости диагонального сечения $AA_1C_1C$.

**2.** Точка $F$ — середина ребра $DC$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, площадь грани которого равна 16 см$^2$. Вычислите расстояние от точки $F$ до ее образа при симметрии относительно плоскости диагонального сечения $BB_1D_1D$.

**3.** $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, основанием которой служит прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине $C$. Постройте образ данной призмы при симметрии относительно плоскости грани $CC_1B_1B$.

**4.** Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник $ACB$ с прямым углом при вершине $C$. Постройте точки $F_1$ и $F$ — образы точек $B_1$ и $B$ при симметрии относительно плоскости грани $AA_1C_1C$. Вычислите площадь боковой поверхности призмы $ABFA_1B_1F_1$, если $AC = 4$ см, $AB = AA_1 = 5$ см.

**5.** $SABC$ — правильный тетраэдр, $O$ — точка пересечения медиан треугольника $SAC$. Вычислите расстояние от точки $O$ до точки, симметричной ей относительно плоскости $ASF$, где $F$ — середина ребра $CB$, если площадь поверхности данного тетраэдра равна $4\sqrt{3}$ см$^2$.

**6.** Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите образ отрезка $AD_1$ при параллельном переносе на отрезок $AB$ в направлении от $A$ к $B$.

**7.** Точки $O$ и $F$ — точки пересечения диагоналей граней $AA_1B_1B$ и $DD_1C_1C$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно. Постройте образ отрезка $OF$ при параллельном переносе на отрезок $CD$ в направлении от $C$ к $D$.

**8.** $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма. Постройте образ грани $BB_1C_1C$ этой призмы при параллельном переносе на отрезок $AC$ в направлении от $A$ к $C$.

**9.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Постройте образ этого параллелепипеда при параллельном переносе на отрезок $AC$ в направлении от $A$ к $C$.

## ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

### § 1. Параллельное проектирование

Для изображения на плоскости (например, на листе бумаги) геометрических фигур, расположенных в пространстве, используется параллельное проектирование. Определяется оно следующим образом.

Пусть $\alpha$ — некоторая плоскость, а $l$ — некоторая прямая, пересекающая эту плоскость. Возьмем в пространстве произвольную точку $X$. Если точка $X$ не лежит на прямой $l$, то проведем через $X$ прямую, параллельную прямой $l$, и обозначим через $X'$ точку пересечения этой прямой с плоскостью $\alpha$. Если точка $X$ лежит на прямой $l$, то обозначим через $X'$ точку пересечения прямой $l$ с плоскостью $\alpha$.

Точка $X'$ называется проекцией точки $X$ на плоскость $\alpha$ при проектировании параллельно прямой $l$ (или параллельной проекцией точки $X$).

Плоскость $\alpha$ называется *плоскостью проекций*, а о прямой $l$ говорят, что она задает *направление проектирования* (рис. 201, *а*). Все прямые, параллельные прямой $l$, задают одно и то же направление проектирования и поэтому также называются *проектирующими прямыми*.

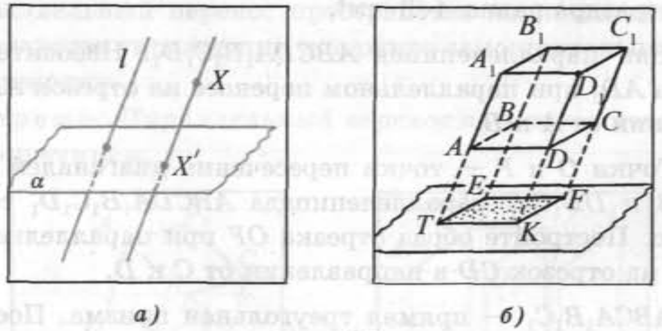



Рис. 201

Пусть $F$ — плоская или пространственная фигура. *Проекцией фигуры F на плоскость $\alpha$ при проектировании параллельно прямой l называется множество F′ проекций всех точек фигуры F.* Например, если плоскость $\alpha$ параллельна



основанию $ABCD$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а прямая $l$ параллельна прямой $AA_1$, то проекцией параллелепипеда на плоскость $\alpha$ является параллелограмм $TEFK$ (рис. 201, *б*).

Заметим, что проекция заданной фигуры зависит от выбора плоскости проекций и проектирующей прямой.

Сформулируем и докажем основные свойства параллельного проектирования при условии, что проектируемые отрезки и прямые не параллельны прямой, задающей направление проектирования.

Свойство 1. *Проекция прямой есть прямая, а проекция отрезка — отрезок.*

Доказательство.

Пусть $b$ — некоторая прямая, не параллельная прямой $l$, которая задает направление проектирования. Не ограничивая общности, можем считать, что прямые $b$ и $l$ пересекаются. Через прямые $b$ и $l$ проходит единственная плоскость $\beta$. Она пересекает плоскость $\alpha$ по некоторой прямой $b'$. Эта прямая и является проекцией прямой $b$ на плоскость $\alpha$. Действительно, пусть точка $X \in b$, а точка $X'$ — ее проекция на плоскость $\alpha$. Тогда проектирующая прямая $XX'$ лежит в плоскости $\beta$. Плоскость $\beta$ пересекает $\alpha$ по прямой $b'$, следовательно, точка $X'$ лежит на прямой $b'$. Кроме того, каждая точка прямой $b'$ является проекцией некоторой точки прямой $b$. Таким образом, прямая $b'$ — проекция прямой $b$ (рис. 202, *а*, *б*).

Теперь не трудно понять, что проекция отрезка есть отрезок.

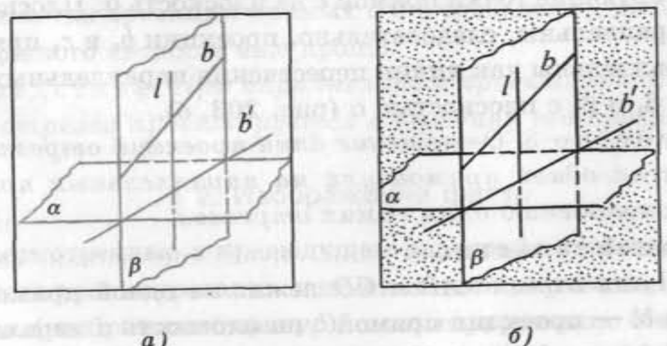
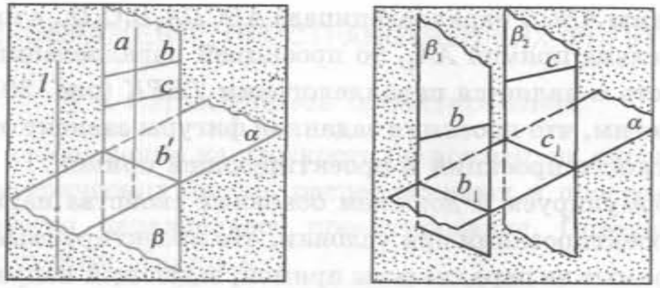



Рис. 202




а) б)

Рис. 203

Свойство 2. *Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.*

Доказательство.

Пусть даны две параллельные прямые $b$ и $c$. Возможны два случая.

1) Некоторая проектирующая прямая $a$ пересекает обе прямые $b$ и $c$. В этом случае прямая $a$, а также все остальные проектирующие прямые, пересекающие прямые $b$ и $c$, лежат в одной плоскости $\beta$, проходящей через параллельные прямые $b$ и $c$. Но тогда по свойству 1 проекцией прямой $b$ и прямой $c$ будет прямая $b'$, по которой пересекаются плоскости $\beta$ и $\alpha$ (рис. 203, *а*).

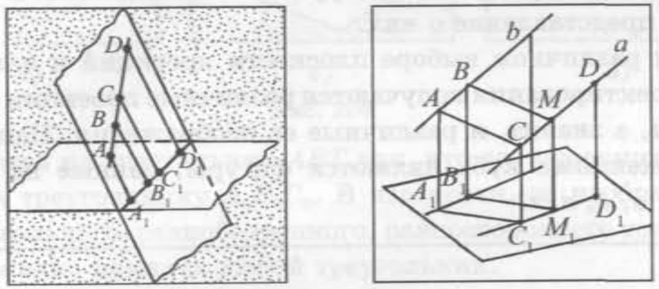
2) Не существует проектирующих прямых, пересекающих прямые $b$ и $c$ одновременно. Пусть $\beta_1$ — плоскость, в которой лежат все прямые, проектирующие точки прямой $b$ на плоскость $\alpha$, а $\beta_2$ — плоскость, в которой лежат прямые, проектирующие точки прямой $c$ на плоскость $\alpha$. Плоскости $\beta_1$ и $\beta_2$ параллельны, следовательно, проекции $b_1$ и $c_1$ прямых $b$ и $c$ параллельны как линии пересечения параллельных плоскостей $\beta_1$ и $\beta_2$ с плоскостью $\alpha$ (рис. 203, *б*).

Свойство 3. *Отношение длин проекций отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению длин самих отрезков.*

Доказательство.

1) Пусть отрезки $AB$ и $CD$ лежат на одной прямой $b$, а прямая $b'$ — проекция прямой $b$ на плоскость $\alpha$ параллельно прямой $l$ (рис. 204, *а*). Проекции $A_1B_1$ и $C_1D_1$ отрезков $AB$ и $CD$ лежат на прямой $b'$. Проектирующие прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ и $DD_1$ параллельны между собой и лежат в одной плоскости $\beta$ ($b' = \beta \cap \alpha$). Из планиметрии известно, что параллельные прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ и $DD_1$ отсекают от двух прямых $b$ и $b'$ плоскости $\beta$ пропорциональные отрезки, т. е. $AB : CD = A_1B_1 : C_1D_1$.






а) б)

Рис. 204

Пусть отрезки $AB$ и $CD$ лежат на параллельных прямых $b$ и $a$ (рис. 204, *б*). Проведем прямую $AC$ и через точку $B$ — ей параллельную прямую, которая пересекает прямую $a$ в некоторой точке $M$. Четырехугольник $ABMC$ — параллелограмм. Рассмотрим случай, когда его проекция на плоскость $\alpha$ есть параллелограмм $A_1B_1M_1C_1$. Тогда $AB = CM$, $A_1B_1 = C_1M_1$. По доказанному $CM : CD = C_1M_1 : C_1D_1$. Таким образом, $AB : CD = A_1B_1 : C_1D_1$.

Если проекция параллелограмма $ABMC$ есть отрезок (в случае когда проекции прямых $a$ и $b$ совпадают), доказательство данного свойства еще проще.

Следствие. *При параллельном проектировании середина отрезка проектируется в середину его проекции.*

## § 2. Изображение фигур

Рассмотренные в предыдущем параграфе свойства параллельного проектирования применяются при выполнении рисунков (изображений фигур), иллюстрирующих теоремы и задачи стереометрии.

***Изображением фигуры F называется любая фигура, подобная проекции этой фигуры на некоторую плоскость.***

Выполняя изображения фигур, расположенных в пространстве, необходимо учитывать свойства, сохраняющиеся при параллельном проектировании, а в остальном изображение может быть произвольным. Важно только, чтобы изображения рассматриваемых фигур были наглядными и давали верное представление о них.

При различном выборе плоскости проекций и направления проектирования получаются различные проекции данной фигуры, а значит, и различные ее изображения. Например, изображениями куба являются фигуры, данные на рисунке 205, *а*, *б*, *в*, *г*.

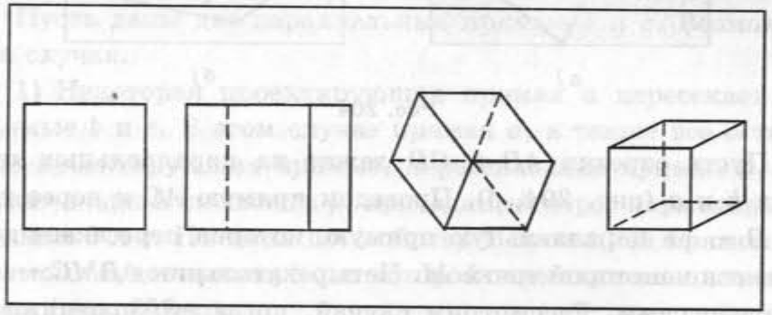


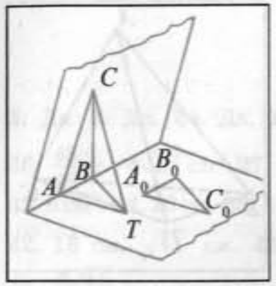
Рис. 205

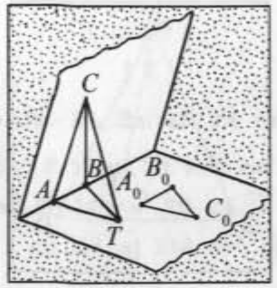
Изображение куба, данное на рисунке 205, *а* не дает представления о кубе, наглядным является изображение, данное на рисунке 205, *г*. При построении изображений плоских фигур, расположенных в пространстве, предполагается, что плоскости рассматриваемых фигур не параллельны направлению проектирования.

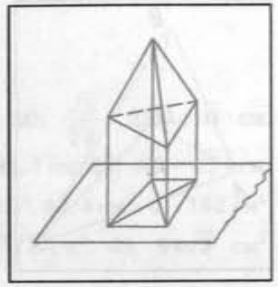
1. *В качестве изображения данного треугольника можно взять произвольный треугольник.*

Действительно, пусть даны два треугольника $ABC$ и $A_0B_0C_0$ (рис. 206, *а*, *б*). Обозначим $\alpha$ плоскость, проходящую через прямую $AB$, а $ABT$ — треугольник в этой плоскости, подобный треугольнику $A_0B_0C_0$. Тогда при проектировании на плоскость $\alpha$ параллельно прямой $CT$ треугольник $ABC$ проектируется на треугольник $ABT$ так, что его проекция будет подобна треугольнику $A_0B_0C_0$. В частности, за изображение прямоугольного, равнобедренного, равностороннего треугольников можно принять любой треугольник.





а) б) в)

Рис. 206

2. *В качестве изображения данного параллелограмма можно взять произвольный параллелограмм.*

В самом деле, проекциями равных параллельных отрезков являются равные параллельные отрезки, следовательно, изображением параллелограмма является параллелограмм. В частном случае за изображение прямоугольника, квадрата, ромба можно принять любой параллелограмм.

3. При изображении пространственных фигур пользуются тем фактом, что *фигуру, состоящую из сторон и диагоналей любого выпуклого или невыпуклого четырехугольника, можно считать изображением треугольной пирамиды* при определенном выборе направления проектирования и плоскости, на которую проектируется эта пирамида (рис. 206, *в*).

Например, фигуры, изображенные на рисунке 207, *а*, *б*, *в*, являются изображениями треугольной пирамиды при соответствующем выборе направления проектирования.

Для построения изображения параллелепипеда $A_0B_0C_0D_0A_0'B_0'C_0'D_0'$ можно воспользоваться тем, что точки $A_0$, $B_0$, $D_0$, $A_0'$ являются вершинами треугольной пирамиды $A_0B_0D_0A_0'$. В качестве их изображения можно взять вершины произвольного четырехугольника $ABDA_1$, т. е. любые три отрезка $AB$, $AD$ и $AA_1$ в плоскости изображения с общим кон-

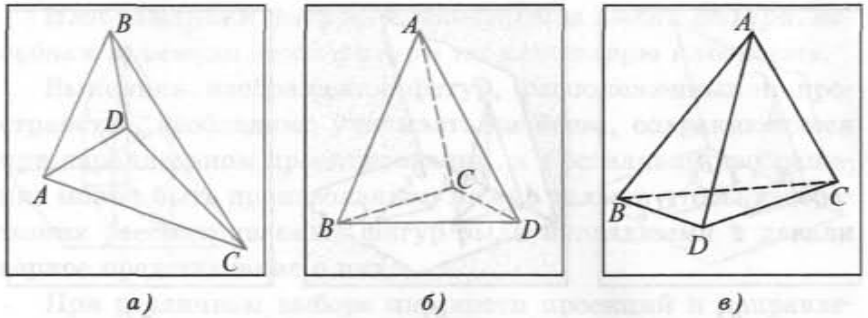



Рис. 207

цом $A$, никакие два из которых не лежат на одной прямой, можно принять за изображение ребер $A_0B_0$, $A_0D_0$ и $A_0A_0'$ параллелепипеда. *Изображения остальных ребер параллелепипеда строятся с использованием свойств, которые сохраняются при параллельном проектировании* (все грани параллелепипеда являются параллелограммами, следовательно, их изображения — параллелограммы). На рисунке 208, *б*, *в* даны различные изображения параллелепипеда $A_0B_0C_0D_0A_0'B_0'C_0'D_0'$ (рис. 208, *а*).

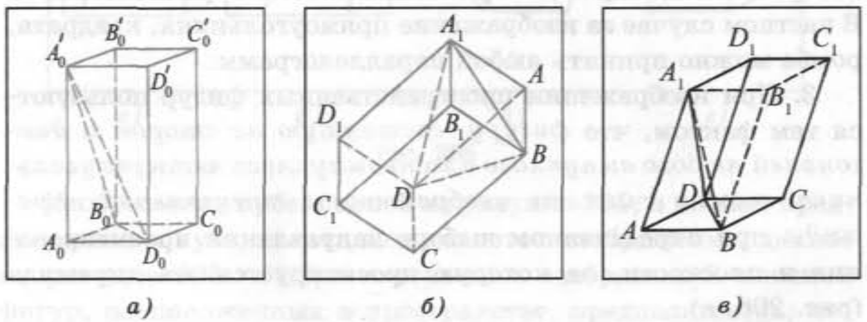



Рис. 208

# ОТВЕТЫ

## ГЛАВА 1

### § 1

**2.** Да. **3.** Да. **14.** Да. **15.** Да. **16.** Да. **19.** 24 см². **20.** $\frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$. **21.** $\sqrt{10}$ см. **26.** $\frac{48}{49}(9-4\sqrt{2})$ см². **27.** $2(5+3\sqrt{2})$ см. **30.** $9\sqrt{3}$ см². **31.** 7 см. **32.** $4(3+\sqrt{2})$ см. **33.** 6 см². **34.** 20 см. **35.** 4 см². **38.** 240 см². **39.** $24\sqrt{15}$ см². **40.** 4 см². **41.** 192 см². **42.** 13 см, $\sqrt{41}$ см. **43.** 2 см. **44.** а) 216 см²; б) 512 см³. **45.** $64\sqrt{3}$ см². **46.** $\frac{8\sqrt{15}}{15}$ см.

### § 2

**10.** а) Например, *DB*, *TF*, *CF*, *AF*, *OF*; в) да; г) например, *AD*, *DB*, *AB*, *AE*, *TB*, *TE*. **12.** а) Точка *O*; б) по прямой *OD*. **14.** а) Плоскости *ABT* и *TBC* пересекаются по прямой *BT*, плоскости *TBE* и *TDC* пересекаются по прямой *TC*; в) да. **16.** а) Точка *F*; б) по прямой *FT*; в) да. **20.** а) Точка *O*; б) в точке *K*; в) да. **22.** а) Прямая *PX*; б) в точке *P*; в) да. **47.** $(\sqrt{5}+1)S$. **48.** $2a^2\left(1+\frac{\sqrt{2\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$. **49.** $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$. **50.** $8\sqrt{3}$ см².

### § 3

**1.** Верно, если эти точки не лежат на одной прямой. **5.** *ACD*, *AKD*, *AFD*, *ABD*. **10.** $\sqrt{3}$ см. **13.** Не всегда. **14.** $5\sqrt{2}$ см.

### § 4

**8.** б) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ см². **9.** 12 см². **12.** б) $6+\sqrt{3}$ см. **13.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$. **16.** б) $\frac{3\sqrt{41}}{5}$ см. **17.** $\frac{a\sqrt{8R^2-a^2}}{2}$. **18.** б) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{10}-1)P}{9}$. **19.** $\sqrt{3}$ см. **20.** 1 см. **21.** $2\sqrt{2}Q$. **24.** $\frac{1}{2}R^2\sqrt{3}$. **25.** $3a^2$. **28.** $2\sqrt{3}$ см². **29.** $\frac{\sqrt{2(4S^2+a^4)}}{4a}$. **30.** $\frac{a^2\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **33.** $\sqrt{5}+\frac{3}{2}\sqrt{2}$ см. **34.** 24 см². **41.** $8\sqrt{21}$ см². **42.** $2\sqrt{6}S$. **43.** $\frac{\sqrt{7}(6-\sqrt{3})S}{66}$. **44.** $\frac{5a^2\sqrt{3}}{4}$. **45.** $4a\left(\sqrt{\sqrt{a^4+4S^2}}-a^2\right)$. **46.** $2\sqrt{3}S$. **47.** 288 см². **48.** $\frac{1}{4}a\sqrt{b^2+a^2}$.

## ГЛАВА 2

### § 1

**11.** б) $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$ см. **15.** б) 13 см. **16.** 36 см. **17.** $\frac{8}{3}$ см. **18.** 20 см. **19.** 3 см. **20.** 8 см. **22.** 9,8 см. **23.** б) 1,8 см. **24.** $\frac{32\sqrt{3}}{9}$ см. **25.** $\frac{9\sqrt{3}a^2}{8}$ см. **29.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **30.** 16 см². **31.** $\frac{\sqrt{S}}{4}$. **32.** $\frac{\sqrt[4]{15S^2}}{4}$. **33.** $\frac{16\sqrt{11}S}{33}$.

§ 2

10. б) 2,5 см. 15. 6 см. 16. 24 см². 19. 180 см². 20. 6 см, 9 см. 21. $\frac{a^2\sqrt{5}}{8}$. 22. $a\left(\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right)$. 23. 5 см. 24. 16 см. 29. $\frac{8}{3}$ см. 31. 3 см. 33. 1 см². 34. $2a$. 35. 6 см. 36. 4 см. 37. 2 см.

§ 3

6. б) Нет; в) нет. 8. а) Прямые $OX$ и $ME$ скрещивающиеся; б) нет; в) да. 12. а) Нет; б) нет; в) прямые $OA_1$ и $CC_1$ не являются скрещивающимися, прямые $CC_1$ и $TD$ скрещивающиеся. 17. а) Прямые $OC$ и $DT$ скрещивающиеся.

§ 4

7. а) Верно; б) 30°; в) нет. 8. а) 90°; б) верно. 9. а) 60°; б) нет; в) 30°. 10. а) Верно; б) 60°; в) 60°. 11. а) Верно; б) 90°; в) $\frac{1}{5}$. 12. $\arccos\frac{4}{5}$. 13. а) 60°; б) $\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$. 14. $\arccos\frac{3\sqrt{5}}{10}$. 15. а) 60°; б) 60°. 16. 90°. 17. б) $\operatorname{arctg} 2$; в) $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

§ 5

10. а) $(ETK)\parallel(SBC)$, $DK\subset(ETK)$, следовательно, $DK\parallel(SBC)$; б) нет. 13. б) 4 см². 16. $2\left(\sqrt{3}+1\right)$ см. 17. а) Верно. 19. а) Верно; б) $KO$ — средняя линия треугольника $B_1BD$. 22. $2+\sqrt{17}$ см. 26. $\frac{9}{4}\sqrt{427}$ см². 29. 14 см. 30. $\frac{S}{16}$. 31. 16 см². 32. 72 см. 33. 19 см. 34. $\frac{4}{3}S$. 35. $\frac{5}{4}Q$. 36. $\frac{1}{9}S$, $\frac{4}{9}S$. 37. $\frac{4}{25}Q$. 38. 1 : 2, считая от вершины. 39. $\frac{9a\sqrt{4b^2-a^2}}{64}$. 40. 8 см².

## ГЛАВА 3

§ 1

14. 5 см. 15. б) 20 см. 16. 10 см или $8\sqrt{10}$ см. 17. $\sqrt{29}$ см. 24. $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$. 26. $4\sqrt{2}$ см². 28. 5 см. 29. $\frac{13}{4}$ см. 30. 90°. 31. 12 см. 32. 12 см. 34. $16\sqrt{2}$ см². 36. $4\left(2+\sqrt{5}\right)$ см². 37. 14 см. 38. в) 4 см. 39. 5 см. 41. 4 см. 42. 12 см. 43. 12 см, 20 см. 44. $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. 45. $\frac{2}{9}ab$.

§ 2

5. $\sqrt{33}$ см. 6. $a\sin\varphi$. 8. б) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. 11. 30 см². 12. 4 см. 13. б) $9\sqrt{2}$ см². 14. 5 см. 15. $2\sqrt{3}$ см². 16. $\frac{\sqrt{4S^2-a^2b^2}}{a}$. 17. $48\sqrt{10}$ см². 18. 4 см. 19. 2 см, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см.



20. $8\sqrt{5}$ см, $8\sqrt{5}$ см, $12\sqrt{2}$ см. 21. $4\left(2+\sqrt{6}\right)$ см². 22. $\frac{a\sqrt{b^2+a^2\sin^2\alpha}}{2\cos\alpha}$. 23. $\frac{a\sqrt{55}}{5}$. 24. $\frac{a}{8S}\sqrt{48S^2-9a^4}$. 25. 4 см, 6 см. 26. 20 см. 27. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ см. 28. 16 см, 40 см. 29. $\frac{\sqrt{51}}{2}$ см². 30. 17 см. 31. 2,5 см. 32. $\sqrt{34}$ см.

§ 3

1. а) Да; б) $DC$. 2. а) $C_1O$; б) нет. 3. а) Нет; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 4. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. 5. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ см. 6. $\sqrt{2}\sin\varphi$. 7. 45°. 8. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 9. $3a$. 10. $\frac{a^2}{2}\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)$. 11. $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ см. 12. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см. 13. 45°, 45°. 14. 2 см, $\sqrt{6}$ см. 15. 30°. 16. 60°.

§ 4

1. а) Нет; в) 45°. 2. а) Нет. 3. а) Нет. 4. 45°. 6. 30°. 7. $12\sqrt{3}$ см². 8. 16 см². 9. 2,4 см. 10. а) Нет. 12. 2 см. 13. $\sqrt{6}$ см. 14. $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ см. 15. 80 см². 16. 60°, 1 см². 20. $\sqrt{2}$ см². 22. $\frac{a^2\sqrt{5}}{8}$. 23. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 25. 60°. 26. 90°. 27. $\frac{1}{3}$. 28. $\frac{1}{6}$. 30. 60°. 31. 6 см. 32. 60°. 33. 120°. 34. 2 см.

(Название и номер школы)

| Учебный год | Имя и фамилия ученика | Состояние учебного пособия при получении | Оценка ученику за пользование учебным пособием |
|---|---|---|---|
| 20 / | | | |
| 20 / | | | |
| 20 / | | | |
| 20 / | | | |
| 20 / | | | |


Учебное издание

Шлыков Владимир Владимирович

**ГЕОМЕТРИЯ**

Учебное пособие для 11 класса
общеобразовательных учреждений
с русским языком обучения
с 12-летним сроком обучения
(базовый и повышенный уровни)

2-е издание

Зав. редакцией *В. Г. Бехтина*. Редактор *Л. Н. Ясницкая*. Художник обложки *А. В. Шлыков*. Художник *Е. В. Шлыков*. Художественный редактор *А. А. Волотович*. Технический редактор *Е. В. Прудывус*. Корректоры *Е. П. Тхир*, *Т. Н. Ведерникова*, *В. С. Бабеня*, *Д. Р. Лосик*.

Подписано в печать с диапозитивов 13.02.2008. Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Офсетная печать. Усл. печ. л. 11. Уч.-изд. л. 8,65. Тираж 118 000 экз. Заказ 164.

Издательское республиканское унитарное предприятие «Народная асвета» Министерства информации Республики Беларусь.
ЛИ № 02330/0131732 от 01.04.2004.
220004, Минск, проспект Победителей, 11.

Республиканское унитарное предприятие «Минская фабрика цветной печати».
ЛП № 02330/0056853 от 30.04.2004.
220024, Минск, Корженевского, 20.